Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s5journaldemat01liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

CINQUIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL

TOME PREMIER. — ANNÉE 1895.

375-20
31/3/96

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

(Tous droits réservés.)

QH
1
J684
Vol. 5
c. 1

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symétriques ou alternés;

Par M. Ed. MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées à Toulouse.

INTRODUCTION.

Soit T un sous-groupe d'ordre $\mathfrak{t}$ du groupe symétrique ou alterné S de n éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'ordre s : supposons $s > 2\mathfrak{t}$ et $n > 4$. Considérons un isomorphe S′ holoédrique et régulier [1] de S : au groupe T correspond une répartition des lettres de S′ en systèmes de non-primitivité $\mathfrak{t}$ à $\mathfrak{t}$, et le groupe G des substitutions opérées par S′ entre les systèmes de cette répartition est transitif, de degré $\varrho = \frac{s}{\mathfrak{t}}$, et holoédriquement isomorphe à S, le groupe T correspondant

[1] C'est-à-dire transitif et d'ordre égal à son degré (Klein).

au groupe H des substitutions de G qui laissent une même lettre de G immobile ([1]).

Réciproquement, tout isomorphe holoédrique de S est de cette forme ([2]).

Dès lors, T étant donné, G se trouve complètement déterminé : nous dirons que G est l'isomorphe de S issu de S et correspondant à T.

Les groupes transitifs de ce genre ont été étudiés par MM. Kronecker, Jordan et Netto.

M. A. Bochert a montré ([3]) que, si T ne contient pas de substitution circulaire d'ordre 3, on a

$$\text{Pour le groupe symétrique} \ldots\ldots \quad \rho \geqq \left[E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]!$$

$$\text{Pour le groupe alterné} \ldots\ldots\ldots \quad \rho \geqq \frac{1}{2}\left\{\left[E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]!\right\}$$

$E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$.

Ce théorème nous a permis d'établir, au sujet des groupes G définis précédemment, quelques propriétés qui font l'objet de ce Mémoire, et que l'on peut résumer ainsi :

G n'est qu'une fois transitif; il ne peut contenir de groupe de degré $< \rho$ transitif entre les lettres qu'il déplace, ou de substitution circulaire ([4]). *Les exceptions n'ont lieu que pour $n \leqq 6$ quand* S *est le groupe symétrique, et pour $n \leqq 8$ quand* S *est le groupe alterné.*

([1]) Jordan, *Traité des substitutions*, p. 58-60; W. Dyck, *Math. Ann.*, t. XXII, p. 90 et suiv.; *voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 12. Nous supposons toujours que G ne se confonde pas avec S.

([2]) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 16-17.

([3]) *Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 584.

([4]) Cette dernière propriété a été établie par M. Netto dans le cas d'une substitution circulaire d'ordre p^m (p premier) (*J. für Math.*, t. C, p. 436; 1887).

PREMIÈRE PARTIE.

S EST UN GROUPE SYMÉTRIQUE.

I. — Des groupes primitifs G isomorphes au groupe symétrique.

Supposons que le groupe G, défini tout à l'heure, soit primitif; eu égard au théorème de M. A. Bochert que nous avons énoncé, nous distinguerons trois cas : les deux cas où T contient une substitution circulaire d'ordre 2 ou 3 et est ou n'est pas transitif, et le cas où T ne contient pas de substitution circulaire d'ordre 2 ou 3.

a. T *contient une substitution circulaire d'ordre* 2 *ou* 3 *et est transitif.*

Considérons une substitution circulaire d'ordre 2 ou 3 contenue dans T, puis les substitutions circulaires d'ordre 2 ou 3 contenues dans T et ayant quelque lettre commune avec la précédente, puis celles qui ont quelque lettre commune avec les précédentes, et ainsi de suite. Le groupe L dérivé de ces substitutions est transitif entre les l lettres qu'il déplace et dérivé de toutes les substitutions circulaires d'ordre 2 ou 3 contenues dans T et qui déplacent une de ces l lettres. D'après un théorème de M. Hölder [1], L se confond avec le groupe symétrique ou alterné de l éléments : si l'on avait $l = n$, T contiendrait le groupe alterné de n éléments et il faudrait $\rho \leqq 2$, ce que nous avons supposé ne pas avoir lieu; donc $2 \leqq l < n$.

T, étant transitif, contiendra un transformé L′ de L par une substitution de T, lequel sera $\neq$ L et déplacera quelque lettre non déplacée par L. Si L et L′ avaient quelque lettre commune, il y aurait dans L′

---

[1] *Math. Ann.*, t. XL, p. 55 et suiv. Le théorème de M. Hölder, établi pour un groupe transitif dérivé de substitutions circulaires d'ordre 3, s'établit aussi facilement quand le groupe est dérivé de substitutions circulaires d'ordre 2.

une substitution circulaire d'ordre 2 ou 3 non contenue dans L et déplaçant une lettre de L, puisque L′ est le groupe symétrique ou alterné entre les l lettres qu'il déplace. Mais, d'après le mode de formation de L, il n'y a dans T aucune substitution circulaire d'ordre 2 ou 3 non contenue dans L et qui déplace quelque lettre de L. Donc L′ et L n'ont aucune lettre commune et n'ont d'autre substitution commune que l'unité.

On voit de même que les transformés distincts de L par T n'ont deux à deux aucune substitution commune, à part l'unité, ni aucune lettre commune.

T étant transitif et de degré n, et L de degré l, L a exactement $\frac{n}{l}$ transformés distincts par les substitutions de T : le groupe M dérivé de ces $\frac{n}{l}$ transformés est permutable aux substitutions de T; l divise n.

Dès lors T admet (¹) une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité l à l; par suite, il est contenu dans le groupe K formé de l'ensemble des substitutions de S qui admettent cette répartition. Or, G étant primitif, on sait (²) que H est maximum dans G, par suite T maximum dans S : T ne peut donc être contenu dans K, qui est plus petit que S, que si T = K.

Voyons comment est formé K; S étant le groupe symétrique entre n lettres, K contient en particulier le groupe M_1 dérivé des $\frac{n}{l}$ groupes symétriques de l lettres correspondant aux $\frac{n}{l}$ groupes symétriques ou alternés transformés de L que nous avons trouvés tout à l'heure, et M_1 est d'ordre

$$\mathfrak{M}_1 = (l!)^{\frac{n}{l}},$$

et permutable aux substitutions de K. Toute substitution de K qui laisse immobiles les $\frac{n}{l}$ systèmes de la répartition considérée fait partie

(¹) Jordan, *Traité des substitutions*, p. 41.

(²) W. Dyck, *Math. Ann.*, t. XXII, p. 102. *Voir* aussi notre *Thèse de Doctorat*, p. 18.

de M_1. L'ordre de K est donc

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{M}_1 \mathfrak{T},$$

$\mathfrak{T}$ étant l'ordre du groupe Θ des substitutions opérées par K entre les systèmes. Or, S étant le groupe symétrique entre n éléments, K devra contenir une substitution permutant ces systèmes d'une manière quelconque choisie *a priori* et, par suite, Θ sera un groupe symétrique entre les $\frac{n}{l}$ systèmes. Donc

$$\mathfrak{T} = \left(\frac{n}{l}\right)!$$

et

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{K} = \left(\frac{n}{l}\right)! \, (l!)^{\frac{n}{l}}.$$

Ceci posé, la condition nécessaire et suffisante pour que G soit primitif est que H soit maximum dans G ou K maximum dans S. Nous allons voir que cette condition est remplie.

Il nous suffira d'établir que le groupe R dérivé de K et d'une substitution de S non contenue dans K se confond avec S.

Vérifions d'abord que R est primitif.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et que R admette une répartition de ses lettres r à r en systèmes de non-primitivité, avec $n > r > 1$. R étant $>$ K, cette répartition ne saurait se confondre avec la répartition l à l considérée tout à l'heure et admise par K, puisque K est formé de l'ensemble des substitutions de S qui admettent cette répartition. K admettra les deux répartitions : on pourra toujours trouver un système de r lettres et un système de l lettres ayant quelque lettre commune sans se confondre : soit s le nombre des lettres communes à ces deux systèmes; on sait [1] et l'on voit facilement qu'à cet ensemble de s lettres correspondra une répartition des lettres de K s à s, et $s \leqq l$. Chaque système de s lettres est contenu dans un système de l lettres; mais K contenant le groupe symétrique entre les l lettres de chaque système de l lettres, groupe qui est primitif entre ces l lettres, s devra être égal à l ou à 1.

---

[1] JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 34.

Si l'on avait $s = l$, il faudrait $r > l$; de plus, un système de l lettres qui a quelque lettre commune avec un système de r lettres y est contenu tout entier, puisque $s = l$: chaque système de r lettres est donc formé d'un même nombre de systèmes de l lettres. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les systèmes de l lettres, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les lettres de α, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ celles de β, $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ celles de γ; K contiendra la substitution

$$(\alpha_1\beta_1\gamma_1)(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\ldots(\alpha_l\beta_l\gamma_l),$$

où α et β appartiennent à un même système de r lettres, γ à un autre système de r lettres, puisque l'on a ici

$$r \geqq 2l, \qquad n \geqq 2r.$$

Cette substitution est de la forme $(\alpha\beta\gamma)$ entre les systèmes de l lettres et montre immédiatement que K et R n'admettent pas la répartition supposée en systèmes de r lettres. On n'a donc pas $s = l$.

Si l'on avait $s = 1$, une substitution quelconque $(ab\ldots)\ldots$, contenue dans un des groupes symétriques de l lettres que K renferme, ne déplace d'autres lettres que celles d'un même système de l lettres. Chacune des lettres $a, b, \ldots$ déplacée par cette substitution fait partie d'un système différent de r lettres, puisque $s = 1$; or une substitution qui admet une répartition en systèmes de r lettres ne peut remplacer une lettre d'un système de r lettres par une lettre d'un autre système de r lettres que si elle déplace toutes les lettres des deux systèmes. Cela ne pourra donc avoir lieu pour $(ab, \ldots), \ldots$ que si $r = 1$, contrairement à l'hypothèse. On n'a donc pas $s = 1$.

R ne peut dès lors admettre aucune répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité avec $n > r > 1$, c'est-à-dire que R est primitif.

Mais R contient une substitution circulaire d'ordre 2 : on en conclut immédiatement que R contient le groupe symétrique de n éléments [1], et, par suite, qu'il se confond avec S.

Le groupe K, choisi comme nous l'avons indiqué, est donc maxi-

---

[1] Jordan, *Journal de Liouville*, p. 383; 1871.

mum dans S : en posant $K = T$, le groupe G correspondant est toujours primitif et l'on peut dire :

La condition nécessaire et suffisante pour que à un groupe T *transitif entre n lettres et contenant une substitution circulaire d'ordre* 2 *ou* 3, *corresponde un groupe* G *primitif, holoédriquement isomorphe à* S *et issu de* S, *est que* T *soit formé de l'ensemble des substitutions de* S *admettant une même répartition des n lettres de* S *en systèmes de non-primitivité l à l* ($2 \leqq l < n$ *et l divisant n*).

Je dis que, en général, les groupes G obtenus ainsi ne sont qu'une fois transitifs : pour le montrer, indiquons un autre moyen de former ces groupes G.

On peut former avec les n lettres de S C_n^l combinaisons de l lettres; on peut ensuite assembler ces C_n^l combinaisons $\frac{n}{l}$ à $\frac{n}{l}$, de façon que les nouveaux assemblages obtenus, que nous appellerons des *hypersystèmes,* contiennent chacun exactement les n lettres de S. Il faudra et il suffira pour cela que les $\frac{n}{l}$ combinaisons entrant dans un hypersystème n'aient deux à deux aucune lettre commune. Les hypersystèmes se distingueront alors les uns des autres, non par les lettres qu'ils renferment, lettres qui sont les mêmes, mais par les $\frac{n}{l}$ combinaisons de l lettres qu'ils renferment.

Chaque substitution de S remplacera chaque combinaison de l lettres par une autre distincte ou non, et, par suite, chaque hypersystème par un autre hypersystème, distinct ou non. Considérons le groupe G_1 des substitutions opérées par S entre ces hypersystèmes.

S étant symétrique contiendra toujours une substitution remplaçant les n lettres par ces mêmes n lettres disposées dans un ordre arbitraire, et, *a fortiori,* un hypersystème quelconque par un hypersystème quelconque. Donc G_1 est transitif.

Nous avons vu précédemment que le groupe T, contenu dans S, admettait une répartition de ses lettres l à l, et que toute substitution admettant cette répartition était contenue dans T. A chaque système

de cette répartition on peut faire correspondre une combinaison de l lettres, et, par suite, à la répartition elle-même, un hypersystème et un seul. Toutes les substitutions de T laisseront donc cet hypersystème immobile. Réciproquement, toute substitution de S laissant cet hypersystème immobile remplace une combinaison de cet hypersystème par une combinaison de cet hypersystème, et admet la répartition considérée, par suite fait partie de T. Le groupe H_1 de G_1 correspondant à T est donc formé de l'ensemble des substitutions de G_1 qui laissent cet hypersystème immobile.

Dès lors, G et G_1 se confondent, à la notation près [1], puisque G et G_1 sont transitifs, holoédriquement isomorphes, et que H et H_1 correspondent tous deux à T; G_1 est donc primitif; je dis qu'il n'est qu'une fois transitif, c'est-à-dire que G ne sera qu'une fois transitif.

En effet, soit

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_l; a_{l+1}, \ldots, a_{2l}; \ldots; a_{n-l+1}, \ldots, a_n$$

la répartition en systèmes de l lettres admise par T : le groupe T laisse l'hypersystème (1) immobile. La condition nécessaire et suffisante pour que G_1 soit deux fois transitif est que H_1 soit transitif, c'est-à-dire que T permute transitivement entre eux les hypersystèmes autres que l'hypersystème (1).

Soient

$$(2) \qquad a'_1, a'_2, \ldots, a'_l; a'_{l+1}, \ldots, a'_{2l}; \ldots; a'_{n-l+1}, \ldots, a'_n;$$

$$(3) \qquad a''_1, a''_2, \ldots, a''_l; a''_{l+1}, \ldots, a''_{2l}; \ldots; a''_{n-l+1}, \ldots, a''_n$$

---

[1] *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 15-17, th. V. On conclut, en effet, immédiatement de ce th. V la propriété suivante :

Soient G *et* G_1 *deux groupes transitifs holoédriquement isomorphes, de même degré;* H *et* H_1 *les groupes de* G *et de* G_1 *formés chacun de l'ensemble des substitutions de* G *et de* G_1 *respectivement qui laissent une lettre de* G *et de* G_1 *immobile; si* H_1 *est le groupe de* G_1 *que l'isomorphisme de* G *et de* G_1 *fait correspondre à* H *dans* G, *les groupes* G *et* G_1 *sont identiques à la notation près.*

Voir aussi Jordan, *Traité des Substitutions*, p. 58-60.

deux hypersystèmes différents de l'hypersystème (1) : T devra renfermer une substitution qui remplace (2) par (3).

T, admettant la répartition (1) en systèmes, remplace tout hypersystème renfermant le système $a_1, a_2, \ldots, a_l$ par un hypersystème renfermant un des systèmes (1). Les hypersystèmes qui ont quelque système ou combinaison commun avec l'hypersystème (1) sont donc permutés exclusivement entre eux par les substitutions de T, et, pour que H_1 soit transitif, il faut que tous les hypersystèmes autres que (1) aient quelque système de l lettres commun avec l'hypersystème (1), ou qu'ils n'en aient aucun.

Or, si $\frac{n}{l} > 2$, on aura toujours un hypersystème différent de (1), et ayant en commun avec (1) un système, par exemple $a_1, a_2, \ldots, a_l$. D'autre part, dans ce cas, on peut assembler les systèmes ou combinaisons de (1) deux à deux ou trois à trois, puis dans chaque assemblage faire passer, par permutation, certaines lettres d'une combinaison à l'autre, de façon que le nouvel hypersystème obtenu n'ait avec (1) aucune combinaison commune. Ainsi, par exemple, l'assemblage

$$(4) \quad a_1, a_2, \ldots, a_l; \quad a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{2l}; \quad a_{2l+1}, a_{2l+2}, \ldots, a_{3l}$$

conduirait à l'assemblage

$$(5) \quad a_{l+1}, a_2, \ldots, a_l; \quad a_{2l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_{2l}; \quad a_1, a_{2l+2}, \ldots, a_{3l};$$

et l'hypersystème formé des assemblages analogues à (5) n'aurait avec l'hypersystème (1) aucune combinaison commune. Donc, quand $n > 2l$, il y aura à la fois des hypersystèmes $\neq$ de l'hypersystème (1) et ayant avec lui quelque combinaison de l lettres commune, et des hypersystèmes n'ayant avec l'hypersystème (1) aucune combinaison commune. Dans ce cas, d'après ce qui précède, H_1 ne sera pas transitif.

Soit $n = 2l$.

L'hypersystème (1) devient

$$(6) \qquad a_1, a_2, \ldots, a_l; \quad a_{l+1}\ a_{l+2}, \ldots, a_{2l}.$$

Considérons l'hypersystème

$$(7) \qquad a_1, a_{l+2}, \ldots, a_{2l}; \quad a_{l+1}, a_2, \ldots, a_l,$$

où chaque combinaison a respectivement 1 et $l-1$ éléments communs avec chacune des combinaisons (6). T admettant la répartition en systèmes (6) remplacera l'hypersystème (7) par des hypersystèmes jouissant des mêmes propriétés; par suite, T ne pourra remplacer (7) par un hypersystème dont les combinaisons aient respectivement 2 et $l-2$ éléments communs avec celles de (6), sauf si l'on a

$$2 = l - 1, \qquad l - 2 = 1$$

ou

$$l = 3$$

(on ne peut d'ailleurs avoir $l < 3$, puisque $n = 2l$ donnerait $n \leqq 4$ contrairement à l'hypothèse).

H_1 ne pourra donc être transitif que si l'on a à la fois $n = 2l$, $l = 3$, c'est-à-dire $n = 6$.

Quand $n = 6$ et $l = 3$, on a les hypersystèmes

1.....	$a_1, a_2, a_3;$	a_4, a_5, a_6		6.....	$a_1, a_3, a_5;$	a_2, a_4, a_6
2.....	$a_1, a_2, a_4;$	a_3, a_5, a_6		7.....	$a_1, a_3, a_6;$	a_2, a_4, a_5
3.....	$a_1, a_2, a_5;$	a_3, a_4, a_6		8.....	$a_1, a_4, a_5;$	a_2, a_3, a_6
4.....	$a_1, a_2, a_6;$	a_3, a_4, a_5		9.....	$a_1, a_4, a_6;$	a_2, a_3, a_5
5.....	$a_1, a_3, a_4;$	a_2, a_5, a_6		0.....	$a_1, a_5, a_6;$	a_2, a_3, a_4

que nous numérotons 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 et qui sont en nombre $\frac{6}{2!(3!)} = 10$.

Le groupe T est dérivé des substitutions qui laissent immobile l'hypersystème 1, c'est-à-dire des substitutions

$$(a_1 a_2), \quad (a_2 a_3), \quad (a_4 a_5), \quad (a_5 a_6), \quad (a_1 a_4)\,(a_2 a_5)\,(a_3 a_6),$$

auxquelles correspondent dans H_1 les substitutions

$$h_1 = (0, 5)(6, 9)(7, 8); \quad h_2 = (2, 5)(3, 6)(4, 7);$$
$$h_3 = (2, 3)(5, 6)(0, 9); \quad h_4 = (3, 4)(6, 7)(8, 9);$$
$$h_5 = (2, 8)(3, 7)(5, 9).$$

H_1 est dérivé de ces substitutions; il est de degré 9 et transitif, car

les substitutions

$$h_3^2,\ h_3,\ h_3h_4,\ h_2,\ h_2h_3,\ h_2h_3h_4,\ h_2h_3h_4h_1,\ h_2h_3h_4,\ h_2h_4$$

permettent de remplacer respectivement 2 par un quelconque des nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

S étant dérivé des substitutions (a_1a_2), (a_2a_3), (a_4a_5), (a_5, a_6) et (a_3a_4), G_1 est dérivé des substitutions

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4 \quad \text{et} \quad h_6 = (1,2)(6,8)(7,9);$$

il est deux fois transitif et d'ordre $10.9.8$; on voit facilement qu'il n'est pas trois fois transitif. C'est un groupe connu [1].

Ainsi, sauf le cas de $n = 6$, les groupes G_1 et, par suite, les groupes G ne sont qu'une fois transitifs. Ces groupes n'existent pas quand n est premier, et seulement dans ce cas, puisque l est un diviseur arbitrairement choisi de n avec $n > l \geqq 2$.

Le cas des groupes G primitifs correspondant à un groupe T transitif, mais non primitif, se ramène toujours à celui que nous venons d'examiner, car ce groupe T admettant une répartition de ses lettres en systèmes de non-primitivité l à l est toujours contenu dans le groupe K formé de l'ensemble des substitutions de S qui admettent cette répartition. D'après ce qui précède, K contient une substitution circulaire d'ordre 2 ou 3 ; T est maximum dans S, puisque G est primitif et, par suite, se confond avec K.

Nous pouvons donc dire :

Si l'on forme avec les n lettres de S C_n^l *combinaisons l à l, et que l'on assemble ces* C_n^l *combinaisons* $\frac{n}{l}$ *à* $\frac{n}{l}$ *de façon que chaque assemblage ainsi obtenu forme un hypersystème contenant exactement les n lettres de* S; *si de plus on considère comme distincts deux hypersystèmes qui ne sont pas formés avec les mêmes* $\frac{n}{l}$ *combinaisons; les groupes* G_1 *formés par les substitutions que* S *opère entre*

---

(1) Cole, *Quarterly Journal*, mai 1894, p. 44.

ces hypersystèmes coïncident, à la notation près, avec les groupes primitifs G *obtenus précédemment.*

G *n'est qu'une fois transitif : la seule exception a lieu pour* $n = 6$ *où* G *est un groupe de degré* 10, *d'ordre* 10.9.8, *deux fois transitif, et dérivé des substitutions*

$$(0,5)(6,9)(7,8);\ (2,5)(3,6)(4,7);\ (2,3)(5,6)(0,9);$$
$$(3,4)(6,7)(8,9);\ (1,2)(6,8)(7,9),$$

entre les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La condition nécessaire et suffisante pour que ces groupes existent est que n *ne soit pas premier.*

On peut définir aussi les groupes de cette catégorie en disant que ce sont, parmi les groupes G primitifs considérés dans notre Mémoire, ceux qui correspondent au cas où T est transitif sans être primitif.

b. T *n'est pas transitif entre* n *lettres.*

Il est inutile de spécifier en outre que T contient une substitution circulaire d'ordre 2 ou 3, car T est encore ici maximum dans S, puisque G est primitif, et T contiendra forcément une substitution circulaire d'ordre 3, puisque $n > 4$.

Si T permute exclusivement entre elles α des lettres de S, il devra contenir le groupe symétrique des substitutions entre ces α lettres et le groupe symétrique entre les $n - \alpha$ autres lettres, sans quoi T ne serait pas maximum dans S.

T contiendra donc le groupe K dérivé du groupe symétrique entre les α lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ et du groupe symétrique entre les $n - \alpha$ autres lettres $a_{\alpha+1}, \ldots, a_n$. Je dis qu'en général K est maximum dans S, et, par suite, que T = K.

En effet, il suffira d'établir qu'en général le groupe R dérivé de K et d'une substitution de S qui n'y est pas contenue se confond avec S.

Or R est transitif, car la substitution adjointe à K pour former R n'est pas contenue dans K, et, par suite, remplace une des lettres $a_1, \ldots, a_\alpha$ par une des lettres $a_{\alpha+1}, \ldots, a_n$, ou inversement.

R est primitif, si $\alpha \neq \frac{n}{2}$: en effet, on peut, puisque un des deux

nombres α, $n-\alpha$ est $<\frac{n}{2}$, supposer que α soit celui des deux qui est $<\frac{n}{2}$, sans quoi, en prenant $n-\alpha=\alpha'$, on raisonnerait sur α' comme nous allons le faire sur α. Supposons que R ne soit pas primitif, quand $\alpha<\frac{n}{2}$: R étant transitif admettra une répartition de ses lettres i à i, avec $2\leqq i\leqq\frac{n}{2}$. Le groupe symétrique entre $n-\alpha$ lettres contenues dans R admet cette répartition; mais il est primitif entre les lettres qu'il permute; donc, si ce groupe symétrique déplace deux lettres d'un même système, toutes ses lettres, en nombre $n-\alpha$, appartiennent à un même système, et il faudrait $i\geqq n-\alpha>\frac{n}{2}$, ce qui n'a pas lieu; si chacune des $n-\alpha$ lettres de ce groupe symétrique appartenait à un système différent, il y aurait au moins $n-\alpha$ systèmes, et l'on aurait $i<2$, ce qui n'a pas lieu. Il faut, par suite, supposer R primitif quand $\alpha\neq\frac{n}{2}$. R contenant des substitutions circulaires d'ordre 3 et 2 se confond avec le groupe symétrique, d'après un théorème de M. Jordan déjà utilisé.

Ainsi, quand $\alpha\neq\frac{n}{2}$, on aura

$$T=K.$$

Quand $\alpha=\frac{n}{2}$, K n'est pas maximum dans S, puisque l'on peut lui adjoindre une des substitutions [1] (n étant pair)

$$\left(a_1\, a_{\frac{n}{2}+1}\right)\cdots\left(a_{\frac{n}{2}}\, a_n\right)$$

ou

$$\left(a_1\, a_{\frac{n}{2}+1}\, a_2\, a_{\frac{n}{2}+2}\right)\left(a_3\, a_{\frac{n}{2}+3}\right)\cdots\left(a_{\frac{n}{2}}\, a_n\right),$$

sans que le groupe R dérivé de K et de cette substitution se confonde

[1] Remarquons que, n étant pair, une de ces deux substitutions est toujours contenue dans le groupe alterné de n éléments; cette observation est utile quand on veut étudier par les mêmes procédés les groupes G primitifs issus du groupe alterné, ainsi que nous l'indiquerons plus loin.

avec S, puisque l'ordre de R sera le double de l'ordre de K; T contiendrait ainsi une substitution de S non contenue dans K; mais cette substitution remplacerait une des lettres $a_1, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$ par une des lettres $a_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, a_{\frac{n}{2}}$ et T devrait être transitif contrairement à l'hypothèse que nous faisons ici.

Nous pouvons donc dire :

La condition nécessaire et suffisante pour que à un groupe T *non transitif et de degré* n, *corresponde un groupe* G *primitif, holoédriquement isomorphe à* S *et issu de* S, *est que* T *soit dérivé du groupe symétrique entre* α *des* n *lettres de* S *et du groupe symétrique entre les* $n - \alpha$ *autres, avec* $1 < \alpha \neq \frac{n}{2}$.

On voit de suite que l'hypothèse $\alpha > \frac{n}{2}$ donnera les mêmes groupes G que l'hypothèse $\alpha < \frac{n}{2}$.

Je dis que les groupes G obtenus ainsi sont une seule fois transitifs : pour le montrer, indiquons d'abord un autre moyen de former ces groupes G.

Considérons les C_n^α produits ou combinaisons des lettres $a_1, \ldots, a_n$, α à α, α étant $\neq \frac{n}{2}$. Chaque substitution de S remplacera chacune de ces C_n^α combinaisons par une de ces mêmes C_n^α combinaisons, et, par suite, opérera entre ces C_n^α combinaisons une certaine substitution. Soit G_1 le groupe formé par ces substitutions.

S étant symétrique contient toujours une substitution remplaçant une des C_n^α combinaisons par une autre arbitrairement choisie, et, par suite, G_1 est transitif.

Le groupe K dérivé du groupe symétrique entre $a_1, \ldots, a_\alpha$ et du groupe symétrique entre $a_{\alpha+1}, \ldots, a_n$ est évidemment formé de l'ensemble des substitutions de S qui laissent immobile la combinaison $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ et $K = T$ puisque $\alpha \neq \frac{n}{2}$. Alors le groupe H_1 formé de l'ensemble des substitutions de G_1 qui laissent une lettre de G_1 immobile, et le groupe H formé de l'ensemble des substitutions de G qui

laissent une lettre de G immobile sont les groupes que l'isomorphisme holoédrique des groupes G et G_1 avec S fait correspondre à T; G et G_1 sont transitifs et de même degré : donc G et G_1 sont identiques à la notation près, et nous n'avons plus qu'à montrer que G_1 est une seule fois transitif.

Si G_1 était deux fois transitif, H_1 serait transitif, et T devrait permuter transitivement toutes les combinaisons différentes de la combinaison $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$. Or T permute exclusivement entre elles d'une part les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$, d'autre part les lettres $a_{\alpha+1}, \ldots, a_n$: T permute donc exclusivement entre elles les combinaisons renfermant exactement k des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$; H_1 ne sera donc pas transitif si k est susceptible de deux valeurs, ce qui aura toujours lieu, puisque $k \leqq \alpha$, dès que $\alpha > 1$. L'hypothèse $\alpha = 1$ devant être écartée, parce qu'alors G se confondrait avec S; H_1 n'est pas transitif : G_1 et G ne sont donc qu'une fois transitifs.

Si l'on forme (¹) *avec les n lettres de* S *les* C_n^α *combinaisons possibles* α *à* α, *les groupes* G_1 *formés par les substitutions que* S *opère entre ces* C_n^α *combinaisons coïncident, à la notation près, avec les groupes primitifs* G *obtenus précédemment* $\left(\alpha \text{ étant } \neq \frac{n}{2}\right)$.

Par suite G *n'est qu'une fois transitif.*

c. T *ne contient pas de substitution circulaire d'ordre* 2 *ou* 3, *ou, ce qui revient au même,* T *est primitif.*

Nous avons vu que le cas où T n'est pas primitif se ramenait à l'un des deux cas précédents; si d'ailleurs T est primitif, il ne contient pas de substitution circulaire d'ordre 2 ou 3, sans quoi, d'après un théorème connu, il contiendrait le groupe alterné de n éléments, et il faudrait $\rho = \frac{S}{G} \leqq 2$, contrairement à l'hypothèse faite au début du Mémoire.

(¹) Ces groupes ont déjà été cités par M. Jordan (*Comptes rendus*, 2ᵉ semestre 1872, p. 1755) et par nous (*Thèse de Doctorat*, p. 22). *Voir* aussi Frobenius, *J. für Math.*, t. CI, p. 287.

On a, d'après M. A. Bochert,

$$(8)\qquad \begin{cases} \text{Pour } n \text{ pair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \rho \geqq \left(\frac{n}{2}\right)! \\ \text{Pour } n \text{ impair} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \rho \geqq \left(\frac{n+1}{2}\right)! \end{cases}$$

Ces relations permettent de montrer assez simplement que G ne peut être trois fois transitif que pour de petites valeurs de n.

Si en effet G était trois fois transitif il faudrait

$$(9)\qquad \text{ordre } G = \mathcal{G} = n! \qquad \geqq \rho(\rho - 1)(\rho - 2)$$

et l'on voit facilement que ceci n'est possible, eu égard aux relations (8), que pour de petites valeurs de n.

De la même manière on pourrait voir que G ne peut renfermer un groupe transitif de degré $< \rho - 1$, sauf pour de petites valenrs de n. En effet, M. Jordan a montré le théorème suivant (¹) :

Théorème. — *Soit* G′ *un groupe primitif et de degré* ρ *contenant un groupe* B *dont les substitutions ne déplacent que* p *lettres, et les permutent transitivement :* G′ *renferme un groupe de degré* $p + q + r + s + \ldots + 1 = P \leqq \rho$, *deux fois transitif; on a*

$$p > q > r > s > \ldots > 1,$$

p *étant un multiple de* q, q *un multiple de* r, ...; G′ *renferme une suite de groupes transitifs entre les lettres qu'ils déplacent et de degrés* p, $p + q$, $p + q + r$, ..., $p + q + r + \ldots + 1$, *chacun d'eux étant contenu dans ceux qui le suivent. Par suite* G′ *est* $(\rho - P + 2)$ *fois transitif.*

(¹) *Journal de Liouville*, p. 384-389; 1871. Nous modifions l'énoncé eu égard à l'objet que nous avons en vue, mais les résultats donnés ci-dessus sont entièrement établis par M. Jordan dans sa démonstration.

Un cas particulier de ce théorème a été établi par M. Netto (*J. für Math.*, t. CIII, p. 333; 1888).

Si le groupe transitif que nous considérons renfermait un groupe transitif de degré $< \rho - 1$, il serait alors $\rho - P + 2$ fois transitif, et, sauf pour de petites valeurs de n, il faut $\rho - P + 2 \leqq 2$, c'est-à-dire $\rho = P$.

En remarquant qu'ici $q > 0$, puisque $p < \rho - 1$ et $\rho = P$, on est conduit à une inégalité de la forme (9) qui donne en tout cas

$$(10) \qquad \mathcal{G} = n! > \frac{\rho^3}{2}$$

dès que n n'est pas trop petit, inégalité qui est impossible dès que n surpasse une limite finie, eu égard aux relations (8).

Mais, plus généralement, on peut montrer que G n'est qu'une fois transitif si $n > 5$, en s'appuyant sur le lemme suivant :

Lemme I. — *Dans un groupe* G′ *deux fois transitif quelconque, de degré* ρ *et d'ordre* $\mathcal{G}'$, *une substitution quelconque a toujours au moins* $\rho - 1$ *transformées distinctes; par suite, le nombre des substitutions du groupe échangeables à une substitution quelconque de ce groupe est* $\leqq \frac{\mathcal{G}'}{\rho - 1}$.

Soient G′ un groupe deux fois transitif, de degré ρ, et d'ordre

$$\mathcal{G}' = \rho(\rho - 1)k;$$
$$\Sigma' = (ab\ldots)\ldots$$

une substitution de G′. Les substitutions qui laissent la lettre a immobile forment un groupe H′, transitif entre $\rho - 1$ lettres, et d'ordre

$$\mathcal{H}' = (\rho - 1)k.$$

Soit

$$\Theta' = (bc\ldots)\ldots$$

une substitution de H′. Ce groupe étant transitif entre les $\rho - 1$ lettres $b, c, \ldots$, on peut choisir Θ' de façon que c soit une lettre arbitraire différente de a et b. Or

$$\Sigma'_1 = \Theta'^{-1}\Sigma'\Theta' = (ac\ldots)\ldots.$$

D'après ce qu'on vient de dire, en faisant varier Θ', on peut faire prendre à c, par suite à Σ'_1, $\rho - 2$ valeurs différentes. En tenant compte de Σ', on voit que Σ' a au moins $\rho - 1$ transformées distinctes par les substitutions de G'.

Soient φ le nombre des transformées distinctes de Σ' par les substitutions de G', ψ l'ordre du groupe des substitutions de G' échangeables à Σ'. On a

$$\mathcal{G}' = \varphi\psi, \tag{11}$$

et, puisque $\varphi \geqq \rho - 1$, on obtient

$$\psi \leqq \frac{\mathcal{G}'}{\rho - 1}. \tag{12}$$

C. Q. F. D.

Ceci posé, supposons que le groupe G soit deux fois transitif, et $G' = G$.

Soient Σ la substitution de S correspondante à Σ'; σ l'ordre de Σ, p son degré. On a évidemment pour Σ, et, par suite, pour Σ',

$$\psi \geqq (n - p)!\,\sigma, \tag{13}$$

ce qui donne, d'après (12),

$$\mathcal{G}' = n! \geqq (n - p)!\,\sigma(\rho - 1). \tag{14}$$

S contenant une substitution circulaire d'ordre 2, pour laquelle $\sigma = 2$, $p = 2$, la relation (14) donne

$$(n - 2)!\,2(\rho - 1) \leqq n!$$

ou

$$\rho - 1 \leqq \frac{n(n-1)}{2}. \tag{15}$$

Le rapprochement des relations (8) et (15) donne alors

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Pour } n \text{ pair} \ldots\ldots & \dfrac{n(n-1)}{2} \geqq \left(\dfrac{n}{2}\right)! - 1, \\ \text{Pour } n \text{ impair} \ldots & \dfrac{n(n-1)}{2} \geqq \left(\dfrac{n+1}{2}\right)! - 1. \end{array}\right. \tag{16}$$

n étant >4, on voit facilement que ces inégalités n'ont lieu que pour n égal à 8, 6 ou 5.

La discussion de ces trois cas montre que G n'est deux fois transitif que quand $n = 5$ pour $\rho = 6$.

On peut donc dire :

Un groupe G *primitif, holoédriquement isomorphe à* S, *issu de* S *et correspondant à un groupe* T *de degré n primitif, n'est qu'une fois transitif; les seules exceptions ont lieu quand* $n = 5$ *pour* $\rho = 6$.

Des trois cas a, b, c que nous venons de distinguer nous pouvons conclure que, quel que soit T, les groupes primitifs G ne sont qu'une fois transitifs quand $n > 6$.

En observant que les groupes transitifs G ne peuvent être deux fois transitifs que s'ils sont primitifs, nous en concluons le théorème suivant :

Théorème I. — *En général, un groupe* G *transitif, holoédriquement isomorphe à* S, *issu de* S *et correspondant à un groupe* T *de* S, *n'est qu'une fois transitif; les seules exceptions, correspondant à des groupes connus, ont lieu quand* $n \leqq 6$ *pour des valeurs du degré* ρ *de* G *égales à* 10 *et* 6.

Ce qui précède va nous permettre d'établir la propriété suivante :

Les groupes primitifs G *ne peuvent contenir de substitution circulaire si* $n > 6$.

Supposons qu'un groupe primitif G contienne une substitution circulaire U′ d'ordre h.

Soit (U′) le groupe formé des puissances de U′ : si $h < \rho$, G contient un groupe (U′) de degré h transitif entre h lettres. D'après un théorème de M. Jordan dont nous avons donné l'énoncé précédemment, G serait deux fois transitif, ce qui n'a pas lieu, d'après le théorème I, quand $n > 6$.

Supposons donc $h = \rho$.

Les substitutions de (U′), à part l'unité, déplacent ρ lettres. Soient dès lors U la substitution de S correspondante à U′, (U) le groupe des

puissances de U. La substitution U est d'ordre ρ; elle ne pourrait être circulaire que si son degré était au moins égal à ρ, et il faudrait $\rho \leqq n$, ce qui n'a pas lieu. Il y a donc λ lettres, avec $\lambda \leqq \frac{n}{2}$, que (U) permute exclusivement entre elles.

Nous distinguerons encore trois cas :

a'. T *est transitif et contient une substitution circulaire d'ordre* 2 *ou* 3.

On sait que S permute transitivement les hypersystèmes en opérant entre eux les substitutions de G. Le groupe (U') étant transitif entre les ρ lettres de G, le groupe (U) devra permuter transitivement les hypersystèmes. Ce groupe, permutant exclusivement entre elles λ lettres de S avec $\lambda \leqq \frac{n}{2}$, et une de ses substitutions remplaçant une combinaison de l lettres qui a exactement λ_1 lettres communes avec ces λ lettres par une combinaison qui a également λ_1 lettres communes avec ces λ lettres, cette substitution remplacera un hypersystème dont les combinaisons ont respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ lettres communes avec ces λ lettres par un hypersystème dont les combinaisons ont respectivement $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ lettres communes avec ces λ lettres, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = \lambda$. Le groupe (U) ne permuterait donc transitivement les hypersystèmes que s'il n'existait qu'un seul système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ satisfaisant à l'égalité $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = \lambda$. Il est bien évident, puisque $\frac{n}{2} \geqq \lambda \geqq 2$ et $l \geqq 2$, que, parmi les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, on pourra toujours en trouver deux, par exemple λ_1 et $\lambda_2 < l$, qui soient $\neq 0$. Ces nombres étant tous positifs, on aura au moins les deux systèmes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et $\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \ldots$, où les nombres λ_i avec $i > 2$ ont la même valeur. Donc (U') ne pourrait être transitif entre les ρ lettres, et, par suite, U' n'existe pas.

Nous supposons ici, bien entendu, $n > 6$.

b'. T *n'est pas transitif*.

(U) doit permuter transitivement les C_n^α combinaisons des n lettres α à α que S permute transitivement. Toute substitution de (U) remplacera une combinaison renfermant exactement λ_1 des λ lettres pré-

citées par une autre jouissant de la même propriété. Les nombres λ et α étant $\geqq 2$, on aura toujours au moins deux valeurs de λ_1. On en conclut que (U') ne pourrait être transitif, et, par suite, que U' n'existe pas.

c'. T *ne contient pas de substitution circulaire d'ordre* 2 *ou* 3.

On pourra appliquer les relations (8).

Soit U_1 une substitution de S à ν cycles d'ordres respectifs m_1, m_2, ..., m_ν; h_1 son ordre. On aura

$$h_1 \leqq m_1 m_2 \ldots m_\nu. \tag{17}$$

Nous allons chercher une limite supérieure de la valeur de h_1, quel que soit U_1, soit une limite supérieure de $m_1 m_2 \ldots m_\nu$.

Si l'on avait $m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu < n$, il y aurait évidemment dans S une substitution à ν cycles d'ordres respectifs $m_1 + 1$, m_2, ..., m_ν pour laquelle ce produit serait plus grand que pour U_1. La substitution U_1, pour laquelle $m_1 m_2 \ldots m_\nu$ a la plus grande valeur possible, est donc telle que

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu = n. \tag{18}$$

Quand on se donne ν, on voit facilement que le produit des quantités m_1, m_2, ..., m_ν, qui satisfont à (18) et sont positives, est toujours au plus égal à la valeur de ce produit où l'on suppose m_1, m_2, ..., m_ν entiers ou non, mais égaux, et, par suite, égaux à $\frac{n}{\nu}$. On aura donc pour toute valeur de ν

$$m_1 m_2 \ldots m_\nu \leqq \left(\frac{n}{\nu}\right)^\nu. \tag{19}$$

Pour avoir une limite supérieure de $m_1 m_2 \ldots m_\nu$, quel que soit U_1 ou ν, il suffit d'avoir une limite supérieure de $\left(\frac{n}{\nu}\right)^\nu$.

Or, quand dans cette expression on considère ν comme variant d'une manière continue et restant > 0, et qu'on prend la dérivée

$$\left(\frac{n}{\nu}\right)^\nu \left(\log_e \frac{n}{\nu} - 1\right),$$

on voit facilement qu'il y a un maximum pour $n = e\nu$, et, par suite, que

$$\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\nu} \leqq e^{\frac{n}{e}}.$$

Cette inégalité, rapprochée de (17) et (19), donne

$$h_1 \leqq e^{\frac{n}{e}},$$

ce qui donne *a fortiori*, pour la substitution U,

$$h = \rho \leqq e^{\frac{n}{e}},$$

et, à cause de (8),

$$(20) \qquad \begin{cases} \text{pour } n \text{ pair } \left(\frac{n}{2}\right)! \leqq e^{\frac{n}{e}}, \\ \text{pour } n \text{ impair } \left(\frac{n+1}{2}\right)! \leqq e^{\frac{n}{e}}. \end{cases}$$

Pour montrer que U ne peut exister, il suffit de montrer que (20) est impossible.

Or, on voit facilement que ces inégalités n'ont lieu que pour $n \leqq 6$.

En résumé, dans les trois cas a', b', c' que nous venons de traiter, U ne peut exister si $n > 6$. Donc les groupes primitifs G ne peuvent contenir de substitution circulaire si $n > 6$.

II. — Des groupes transitifs G non primitifs isomorphes au groupe symétrique.

D'après ce que nous avons vu précédemment, quand un groupe G est primitif et que $n > 6$, il ne peut contenir un sous-groupe de degré $< \rho$ transitif entre les lettres qu'il permute; car, d'après un théorème de M. Jordan énoncé plus haut, G serait deux fois transitif, ce qui est contraire au théorème I quand $n > 6$.

On peut se demander si la même propriété existe quand G est transitif sans être primitif.

Supposons que G soit transitif sans être primitif, et contienne un groupe K de degré $< \rho$ transitif entre les lettres qu'il permute.

Considérons une répartition maxima des lettres de G en systèmes de non-primitivité, c'est-à-dire une répartition telle qu'il n'y en ait aucune autre dont chaque système puisse être formé par la réunion de plusieurs systèmes de la première. On sait [1], et l'on voit facilement, que les substitutions opérées par G entre les systèmes de la répartition maxima forment un groupe primitif, que nous désignerons par G'.

Soit H le groupe des substitutions de G qui permutent exclusivement entre elles les lettres d'un des systèmes de cette répartition. Le groupe K étant de degré $< \rho$ laissera immobile quelque lettre de G, et, par suite, permutera exclusivement entre elles les lettres d'un système; il fera donc partie de H ou d'un de ses transformés par les substitutions de G : supposons que ce soit de H, par exemple.

Si l'une des lettres déplacées par K appartient au même système qu'une lettre laissée immobile par K, le groupe K permute exclusivement entre elles les lettres de ce système en en déplaçant quelques-unes. Comme il est transitif entre les lettres qu'il déplace, il ne déplace que des lettres de ce système. Aux substitutions de K correspond dans le groupe G' la substitution 1 et l'ordre $\mathcal{G}'$ de G' est $<$ l'ordre $\mathcal{G}$ de G : G étant le groupe symétrique, il faut $\mathcal{G}' = 2$, puisque $n > 4$. Il n'y a que deux systèmes, et K déplace les lettres d'un seul système.

Si aucune des lettres déplacées par K n'appartient au même système qu'une lettre qu'il laisse immobile, ou bien H contiendra un groupe L permutable aux substitutions de G, ou il n'en contiendra pas. Dans le premier cas, ce groupe L permutera exclusivement entre elles les lettres de chaque système de la répartition maxima considérée, comme on le voit facilement, et aura pour correspondant dans G' l'unité, en sorte que $\mathcal{G}' < \mathcal{G}$, d'où $\mathcal{G}' = 2$: il y aura encore deux systèmes, K ne déplaçant que les lettres d'un seul système. Dans le second cas, $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$: le groupe K' correspondant à K dans G' est d'ordre $\varkappa' =$ ordre de $K = \varkappa$, transitif, et de degré évidemment plus petit que le degré ρ' de G'.

---

(1) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 19.

1° $\mathcal{G}' = 2$. — Le groupe H d'ordre $\mathfrak{H}$ est holoédriquement isomorphe au groupe alterné de n éléments et laisse immobile un des systèmes, par suite, les deux. Les substitutions que H opère entre les lettres de chaque système forment un groupe isomorphe à H, par suite, d'ordre $\mathfrak{H}$ ou 1, puisque H est simple (¹). Pour le système dont K déplace les lettres, ce sera évidemment $\mathfrak{H}$, puisque $\mathfrak{K} > 1$; pour l'autre, au contraire, ce sera évidemment 1, puisque $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}} < \mathfrak{H}$. Dès lors, le groupe H ne déplacerait que les lettres d'un seul système, et, par suite, ne serait pas permutable aux substitutions de G, qui est transitif entre les systèmes. On n'a donc pas $\mathcal{G}' = 2$.

2° $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$. — Le groupe G′ serait primitif, holoédriquement isomorphe au groupe symétrique G, et contiendrait un groupe K′ de degré plus petit que ρ' et transitif entre les lettres qu'il permute. Nous avons vu que, quand $n > 6$, cela ne peut avoir lieu, à moins que G′ ne se confonde avec le groupe symétrique de n éléments. Supposons qu'il en soit ainsi : le groupe H′ de G′ correspondant à H est le groupe symétrique de $n - 1$ éléments.

Or, G étant transitif, H permute transitivement les lettres du système qu'il laisse immobile, lettres que K ne déplace pas. H opère entre les lettres de ce système les substitutions d'un groupe H_1 d'ordre $\mathfrak{H}_1$ isomorphe à H et d'ordre $\leqq \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}} < \mathfrak{H}$. Le groupe H′ étant symétrique entre $n - 1$ éléments, et H contenant un groupe d'ordre $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}_1}$ permutable à ses substitutions, on aura, quand $n > 5$, $\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}}{2}\mathfrak{H}_1$, c'est-à-dire $\mathfrak{H}_1 = 2$. Chaque système comprendra dès lors deux lettres, et, comme il y a n systèmes, puisque G′ est de degré n, on aura $\rho = 2n$.

Mais H contient un groupe M formé de toutes les substitutions de H qui ne déplacent pas les lettres du système que H laisse immobile et M est d'ordre $\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{H}}{2}$. M contient K, et son correspondant M′ dans G′ se confond avec le groupe alterné de $n - 1$ éléments, puisque $n > 5$. G′ renfermant le groupe alterné de n éléments, qui contient M′,

(¹) Jordan, *Traité des substitutions*, p. 56 et 66.

G renferme un groupe H_2 d'ordre $\frac{\mathcal{G}}{2}$, contenant M et K, isomorphe au groupe alterné de n éléments, et permutable aux substitutions de G.

Si H_2 est transitif entre $2n$ lettres, il contient un groupe d'ordre $\frac{\mathcal{G}}{2}\frac{1}{2n}$ formé de l'ensemble de ses substitutions qui laissent une même lettre immobile, et l'on peut toujours choisir cette lettre de façon que ce groupe soit contenu dans M. Le groupe M′ contiendrait donc un groupe d'ordre $\frac{\mathcal{G}}{2}\frac{1}{2n} = \frac{\mathcal{G}}{4}$ moitié moindre que l'ordre de M′, ce qui est absurde puisque M′ est le groupe alterné de $n-1$ éléments et que $n > 5$.

Si H_2 n'est pas transitif, G admet une répartition de ses lettres en deux systèmes de non-primitivité, H_2 permutant exclusivement entre elles les lettres de chaque système (¹). En raisonnant sur H_2 et sur cette répartition comme nous l'avons fait sur H et sur la répartition correspondante, on retombe sur le cas où $\mathcal{G}' = 2$, cas que nous avons écarté.

Nous pouvons par suite conclure :

Théorème II. — *Un groupe* G, *transitif, holoédriquement isomorphe à* S, *issu de* S *et correspondant à un groupe* T *de* S, *ne peut contenir un groupe* K *transitif entre les lettres qu'il déplace, et de degré plus petit que celui de* G, *quand* $n > 6$.

De même, nous avons vu que, quand G est primitif, il ne peut contenir de substitution circulaire si $n > 6$. On peut encore se demander si la même propriété existe quand G est transitif sans être primitif.

Nous allons d'abord établir le lemme suivant.

Lemme II. — *Un groupe transitif ne peut renfermer de substitution circulaire d'ordre* h *que s'il est primitif ou composé avec un sous-groupe d'ordre non premier à* h.

Soit Γ un groupe transitif, non primitif, renfermant une substitution circulaire U d'ordre h. Considérons une répartition maxima en systèmes de non-primitivité admise par Γ, et soient Γ′ le groupe des

(¹) Jordan, *Traité des substitutions*, p. 41.

substitutions opérées par Γ entre les systèmes, U' la substitution d'ordre h' de Γ' correspondant à U : Γ' est primitif [1].

Si l'on a $h' < h$, l'isomorphisme des deux groupes ne peut être holoédrique : au sous-groupe de Γ formé des puissances de $U^{\frac{h}{h'}}$ correspond dans Γ' la substitution 1; Γ est composé [2] avec un sous-groupe qui contient $U^{\frac{h}{h'}}$ et dont l'ordre est divisible par $\frac{h}{h'}$, c'est-à-dire non premier à h.

Supposons maintenant $h = h'$: U' est la substitution que U opère entre les systèmes de la répartition considérée. Le groupe des puissances de U étant transitif entre les lettres de Γ que U déplace, et *a fortiori* entre les systèmes que U déplace, le groupe des puissances de U' sera transitif entre les lettres de Γ' que U' déplace, et U' sera aussi une substitution circulaire; mais le nombre des systèmes que U déplace étant évidemment plus petit que le nombre des lettres de Γ qu'elle déplace, le degré de U', par suite son ordre, devrait être plus petit que celui de U, contrairement à l'hypothèse $h' = h$. Cette hypothèse doit donc être écartée. C. Q. F. D.

Ceci posé, considérons un groupe G, holoédriquement isomorphe à S. transitif, sans être primitif, et supposons qu'il contienne une substitution circulaire U d'ordre h.

D'après le théorème II, on ne peut avoir $h < \rho$, ρ étant le degré de G, quand $n > 6$.

Soit alors $h = \rho$: on a $h > n$.

Considérons une répartition maxima en systèmes de non-primitivité admise par G, et soit G' le groupe des substitutions opérées par G entre les systèmes; d'après le lemme II, G' est d'ordre plus petit que celui de G, sans quoi G serait primitif et renfermerait une substitution circulaire, ce que nous avons vu être impossible quand $n > 6$. On en conclut facilement que G' est d'ordre 2, quand $n > 6$, c'est-à-dire que la répartition admet deux systèmes. Le groupe H, formé par l'ensemble des substitutions de G qui laissent immobile un des systèmes,

---

(1) *Voir* notre *Thèse de Doctorat*, p. 19.

(2) Jordan, *Traité des substitutions*, p. 56.

les laissera tous deux immobiles, et sera d'ordre $\frac{G}{2}$. Il ne contiendra pas U qui permute entre eux les deux systèmes, mais il contiendra U^2, d'ordre $\frac{\rho}{2}$, et le groupe des puissances de U^2 permute transitivement les lettres de chaque système, U^2 opérant entre elles une substitution circulaire. Soit H_1 le groupe des substitutions opérées par H entre les lettres d'un de ces systèmes : il est de degré $\frac{\rho}{2}$ et transitif, isomorphe à H, et, puisque H est simple et permutable aux substitutions de G, holoédriquement isomorphe à H et au groupe alterné de n éléments. D'après le théorème VI établi plus loin, H_1 devant ici contenir une substitution circulaire d'ordre $\frac{\rho}{2}$ se confondra avec le groupe alterné de n éléments quand $n > 8$, et l'on aura

$$\rho = 2n$$

quand $n > 8$. Il en sera évidemment de même pour le groupe H_2 des substitutions opérées par H entre les lettres de l'autre système.

Quand n est égal à 8 ou à 7, les diverses valeurs possibles de ρ s'écartent facilement en remarquant que $h = \rho$ et que $\rho \leqq 15$ pour $n = 8$ et $\rho \leqq 12$ pour $n = 7$.

Il ne nous reste donc à examiner que le cas où $\rho = 2n$, H_1 étant un groupe alterné de n éléments.

Le sous-groupe de S qui correspond à H est le groupe alterné de n éléments et celui qui correspond au groupe K des substitutions de G et H laissant une même lettre de G immobile est un groupe alterné de $n - 1$ éléments.

Si V est la substitution de S correspondant à U, V est d'ordre $\rho = 2n$: U étant une substitution circulaire d'ordre ρ, les substitutions de G échangeables à U sont les puissances de U, et de même les substitutions de S échangeables à V sont les puissances de V. Donc V n'est pas circulaire, puisque S ne contient pas de substitution circulaire d'ordre $> n$ et que le nombre de substitutions de S échangeables à V est $2n$: V contient plusieurs cycles.

Si V contenait deux cycles de même ordre, $(a_1, a_2, \ldots, a_\lambda)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_\lambda)$, ..., S contiendrait la substitution $(a_1, a_2, \ldots, a_\lambda)$

échangeable à V et qui n'est pas une puissance de V. Ceci est impossible d'après ce qui précède, et les ordres $m_1, m_2, \ldots, m_k$ des cycles de V, avec $k \geqq 2$, sont différents.

D'autre part, ni U, ni ses puissances, à part l'unité, ne sont contenues soit dans K, soit dans un de ses transformés par les substitutions de G, puisque U est une substitution circulaire d'ordre p. Par suite, ni V, ni ses puissances, à part l'unité, ne peuvent être contenus dans les groupes correspondants de S, c'est-à-dire dans un groupe alterné de $n - 1$ éléments.

Or, si m_1, par exemple, est impair, la substitution de S formée par le cycle de V qui est d'ordre m_1 sera échangeable à V, devra, par suite, être une puissance de V et sera contenue dans un groupe alterné de $n - 1$ éléments de S, puisque m_1 est impair et $< n$. Ceci est impossible d'après ce qui précède.

Si m_1 et m_2 sont pairs, on a $m_1 \neq m_2$, et, par exemple, $m_1 < m_2$: V^{m_1} est différent de l'unité, déplace au plus $n - m_1$ lettres, est contenue dans un groupe alterné de $n - 1$ éléments, puisque m_1 est pair. Ceci est encore impossible d'après ce qui précède.

On voit donc que, en tout cas, V ne peut exister; il en est de même de U et l'on en conclut :

Théorème III. — *Un groupe* G, *transitif, holoédriquement isomorphe à* S, *issu de* S, *et correspondant à un groupe* T *de* S, *ne peut contenir de substitution circulaire quand* $n > 6$.

SECONDE PARTIE.

S EST UN GROUPE ALTERNÉ.

Les raisonnements étant de tous points semblables à ceux qui précèdent, il nous suffira à peu près d'énoncer les résultats.

Les groupes primitifs G se subdivisent encore en trois catégories :

Première catégorie. — T est transitif sans être primitif (ici T contient une substitution circulaire d'ordre 3, mais non une d'ordre 2).

Deuxième catégorie. — T est intransitif.

Troisième catégorie. — T est primitif.

Pour les deux premières catégories G sera formé de l'ensemble des substitutions du groupe analogue correspondant au cas du groupe symétrique et qui correspondent dans le groupe symétrique à des substitutions paires [1].

On peut dire :

THÉORÈME IV. — *En général,* G *n'est qu'une fois transitif : les seules exceptions, correspondant à des groupes connus, ont lieu quand* $n \leqq 8$, *pour des valeurs de* ρ *égales à* 15, 10 *et* 6.

La discussion des cas particuliers que ne permettent pas d'écarter la relation de M. Bochert et la relation (13) du lemme I se fait assez facilement en s'appuyant sur les propriétés connues des groupes primitifs.

Que S soit symétrique ou alterné, on voit, en effet, quand T est primitif :

Que, si p est un nombre premier $\leqq n - 3$, p divisera ρ ;

Que, si n est premier, ρ sera premier à n ;

Que n divisera $\frac{n!}{\rho}$ ou $\frac{n!}{2\rho}$ respectivement.

On a également cette propriété :

THÉORÈME V. — G *ne peut contenir un groupe* K, *de degré* $< \rho$, *transitif entre les lettres qu'il déplace, quand* $n > 8$.

Enfin, on peut dire également :

THÉORÈME VI. — G *ne peut renfermer de substitution circulaire quand* $n > 8$.

---

(1) C'est-à-dire contenues dans le groupe alterné.

Si G renferme une substitution circulaire, d'après le lemme II, il doit être primitif puisque le groupe alterné est simple, et cette substitution circulaire est d'ordre et de degré ρ, quand $n > 8$, d'après le théorème V.

Quand G est primitif, la marche à suivre est la même que dans le cas où S est le groupe symétrique.

Pour $n = 8$, il existe un groupe G deux fois transitif, de degré 15, d'ordre $15.14.12.8$, renfermant une substitution circulaire d'ordre 15, correspondant à la substitution $(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5)(a_6 a_7 a_8)$ du groupe alterné de huit éléments. Ce groupe G est le groupe linéaire [1] du degré 2^4 (mod. 2).

Pour $n = 7$, il n'existe aucun groupe G renfermant une substitution circulaire.

---

[1] JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 380-382.

Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

M. Bochert a publié dans les *Mathematische Annalen* (t. XXIX, XXIII et XL), une suite de Mémoires très intéressants sur la *Théorie des substitutions*.

Parmi les résultats remarquables qu'il a obtenus figurent en particulier les suivants :

S'il existe un groupe t fois transitif, de degré n et de classe u, et ne contenant pas le groupe alterné, les trois nombres t, n, u satisferont (si $u > 3$) aux deux inégalités

$$u \geqq \frac{n}{2} - 1, \tag{I}$$

$$\log n \geqq a\sqrt{t \log t} \tag{II}$$

a désignant un facteur numérique qu'on peut prendre égal à $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{\log 2}{8}}$, si $t \geqq 8$.

La proposition exprimée par l'inégalité (I) nous paraît être la plus importante qui ait été obtenue dans cette théorie depuis les travaux de M. Sylow; elle ne saurait manquer d'être féconde en conséquences.

Le présent Mémoire a pour but d'établir que cette proposition, combinée avec les résultats de M. Sylow, permet d'établir entre n et t une relation de la forme (II), mais où le coefficient a est sensiblement réduit.

Nous établissons d'abord (§ I) la proposition suivante :

Soit G *un groupe* t *fois transitif, d'ordre* n *et de classe* u, *ne contenant pas le groupe alterné; supposons* $t \geqq 8$.

G *contiendra un sous-groupe* H *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Ses substitutions sont de la forme* AS, A *désignant une substitution opérée entre* t *lettres données* $a_1, \ldots, a_t$, S *une substitution opérée sur les* $n - t$ *autres lettres;*

2° *Les substitutions partielles* A, *combinées ensemble, reproduisent toutes celles du groupe alterné* $\mathfrak{A}_t$ *entre les lettres* $a_1, \ldots, a_t$;

3° H *ne contient aucun sous-groupe jouissant des mêmes propriétés.*

Nous précisons la forme des substitutions de H.

Nous cherchons ensuite une limite inférieure de $n - t$; dans cette étude nous distinguons deux cas, que nous traitons séparément dans les § II et III. Cette analyse nous conduit au résultat suivant :

Soient k un entier arbitraire > 4 et $< t$; δ le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité

$$\delta < t - \frac{(t - k + 1)\log 2}{t + \log 2}.$$

Posons d'ailleurs, pour abréger,

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12t}.$$

On aura l'une des deux inégalités

$$\log(n - t) \geqq (k - 3)\log 2 - \log k,$$

$$\log(n - t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t - \delta).$$

Dans le § IV nous discutons ces formules pour déterminer la ma-

nière la plus avantageuse de choisir l'entier k, et nous arrivons à la relation finale

$$\log(n-t) \geqq a\sqrt{t \log t},$$

où le coefficient numérique a tend rapidement vers la valeur asymptotique $\log 2$ lorsque t tend vers ∞.

I.

Soit G un groupe t fois transitif, de degré n, de classe u et ne contenant pas le groupe alterné. Supposons $t \geqq 8$. On aura (Bochert, *Mathematische Annalen*, t. XL, p. 192)

$$u \geqq \tfrac{1}{2} n - 1.$$

Soient $a_1, \ldots, a_t$, t lettres quelconques choisies arbitrairement parmi celles de G, et soit G′ le sous-groupe formé par celles des substitutions de G qui permutent exclusivement ces lettres entre elles. Les substitutions de G′ seront de la forme

$$AS,$$

A étant une substitution entre les t lettres $a_1, \ldots, a_t$, et S une substitution entre les autres lettres $b_1, \ldots, b_{n-t}$. Les substitutions partielles A permutent entre elles $a_1, \ldots, a_t$ de toutes les manières possibles.

On peut déterminer dans G′ un sous-groupe H jouissant des propriétés suivantes :

1° Les substitutions A_1S_1, A_2S_2, ... de H seront telles que leurs premiers facteurs A_1, A_2, ... reproduisent par leur combinaison toutes les substitutions du groupe alterné $\mathfrak{A}_t$ entre t lettres ;

2° H ne contient aucun sous-groupe jouissant de la propriété précédente.

En effet, le sous-groupe formé par toutes celles des substitutions de G qui permutent $a_1, \ldots, a_t$ d'une manière alternée satisfait à la première condition ; et s'il ne remplit pas la seconde, il contiendra un sous-groupe H qui y satisfait.

Les substitutions de H étant de la forme AS, considérons le groupe I formé par celles de ces substitutions où $A = 1$.

Il est permutable aux substitutions de H. Il pourrait d'ailleurs se réduire à la seule substitution 1; mais nous admettrons, pour plus de généralité, qu'il contienne d'autres substitutions.

Si l'ordre O de I ne se réduit pas à une puissance de 2, il admettra au moins un facteur premier impair p; soit p^μ la plus haute de ses puissances qui divise O. D'après M. Sylow (*Mathematische Annalen*, t. V), I contient un groupe J d'ordre p^μ, et l'on aura

$$O = (rp + 1)\nu p^\mu,$$

νp^μ désignant l'ordre du groupe K formé par celles des substitutions de I qui sont permutables à J; r désignant un entier.

Soient d'ailleurs a_i, a_k, a_l, a_m quatre quelconques des lettres $a_1, \ldots, a_t$. Joignons aux substitutions de I celles des substitutions de H où la première substitution partielle A est égale à

$$(a_i a_k)(a_l a_m).$$

Nous obtiendrons un nouveau groupe I_1 d'ordre $2O$. Soit $\nu_1 p^\mu$ l'ordre du groupe formé par celles de ses substitutions qui sont permutables à J; on aura évidemment $\nu_1 = 2\nu$ ou $\nu_1 = \nu$, suivant que, dans les nouvelles substitutions introduites, il y en a ou non qui soient permutables à J. Mais la seconde hypothèse doit être rejetée; car le théorème de M. Sylow, appliqué à I_1, donne

$$2O = (r_1 p + 1)\nu_1 p^\mu = 2(rp + 1)\nu p^\mu,$$

d'où

$$\nu_1 \equiv 2\nu \qquad \mathrm{mod}\, p.$$

Donc pour toutes les valeurs des indices i, k, l, m, H contiendra une substitution de la forme

$$(a_i a_k)(a_l a_m)S$$

permutable à J. Ces substitutions, combinées avec celles de K, fournissent un groupe H_1 dont les substitutions sont permutables à J, et

de la forme AS, A parcourant toute la suite des substitutions dérivées des substitutions $(a_i a_k)(a_l a_m)$, c'est-à-dire toutes les substitutions du groupe alterné. Mais, par hypothèse, H ne contient aucun sous-groupe jouissant de cette propriété; donc $H_1 = H$, et nous pouvons énoncer ce premier résultat :

Le groupe I *contient un groupe* J *d'ordre* p^μ, *permutable à toutes les substitutions de* H.

Si l'ordre de I se réduisait à une puissance de 2, telle que 2^μ, ce résultat subsisterait encore; on n'aurait qu'à poser $p = 2$ et $J = I$; car les substitutions de H sont permutables à I.

Cela posé, le groupe J, d'ordre p^μ, contient (Sylow, *Mathematische Annalen*, t. V) des substitutions auxquelles toutes celles de J sont échangeables. Celles de ces substitutions qui sont d'ordre p forment un groupe L, unique de son espèce parmi les sous-groupes de J. Les substitutions de H étant permutables à J le seront donc à L.

Réunissons dans une même classe les lettres que L permute entre elles. La $i^{\text{ième}}$ classe, par exemple, contiendra p^{μ_i} lettres (μ_i étant un entier, qui peut être nul pour certaines classes, mais non pour toutes). Caractérisons ces lettres par μ_i indices simultanés, $x_1, \ldots, x_{\mu_i}$ variables chacun de 0 à $p - 1 \bmod p$; les déplacements que L leur fait subir seront représentés par les substitutions linéaires

$$(1) \qquad |x_1, \ldots, x_{\mu_i} \quad x_1 + \lambda_1, \ldots, x_{\mu_i} + \lambda_{\mu_i}|$$

(Jordan, *Traité des substitutions*, p. 201).

Les substitutions de H, étant permutables à L, seront de la forme suivante

$$ABP,$$

B désignant une substitution qui permute d'un mouvement d'ensemble les diverses classes qui ont le même nombre de lettres, en remplaçant chaque lettre par sa correspondante; P désignant un produit de substitutions partielles P_1, P_2, ... opérées respectivement entre les lettres de la première classe, celles de la seconde, etc. D'ailleurs la substitution P_i,

par exemple, devant être permutable au groupe (1), sera de la forme linéaire

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_{\mu_i} x_{\mu_i} + \rho_1 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{\mu_i} & \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_{\mu_i} x_{\mu_i} + \rho_{\mu_i} \end{array}\right|.$$

Considérons le groupe H′ formé par les substitutions partielles AB. Soit I′ le groupe formé par celles de ses substitutions pour lesquelles $A = 1$. Admettons encore, pour plus de généralité, que I′ contienne des substitutions autres que l'unité. Si O′, ordre de I′, n'est pas une puissance de 2, soient p' un des facteurs premiers impairs de O′; $p'^{\mu'}$ la plus haute puissance de p' qui divise O′. On verra, en répétant les raisonnements précédents : 1° que I′ contient un groupe J′ d'ordre $p'^{\mu'}$; 2° que les substitutions de H′ permutables à J′ forment un groupe H'_1, dans les diverses substitutions duquel le premier facteur A parcourt encore toute la suite des substitutions du groupe alterné.

D'ailleurs $H'_1 = H'$; car, si H'_1 était un sous-groupe de H′, celles des substitutions de H pour lesquelles AB appartient à H'_1 formeraient, contre l'hypothèse, un sous-groupe de H, dans lequel les premières substitutions partielles A reproduiraient le groupe alterné.

Le groupe I′ contient donc un groupe J′ d'ordre $p'^{\mu'}$ auquel toutes les substitutions de H′ sont permutables.

Ce résultat subsistera encore si O′ est une puissance de 2, telle que $2^{\mu'}$; il suffira de poser $p' = 2$ et $J' = I'$.

On verra encore : 1° que J′ contient un groupe L′ formé de substitutions d'ordre p' échangeables à toutes celles de J′; 2° que toutes les substitutions de H′ sont permutables à L′; 3° que si l'on réunit dans une même *bi-classe* les classes (contenant toutes le même nombre de lettres) que L′ permute entre elles, ces bi-classes contiendront respectivement $p'^{\mu'_1}$, $p'^{\mu'_2}$, ... classes (une partie des entiers μ'_1, μ'_2, ... pouvant être nuls) 4° que les substitutions de H′ seront de la forme

$$ACP',$$

et celles de H de la forme

$$ACP'P,$$

C désignant une substitution qui permute d'un mouvement d'ensemble

les bi-classes (ou du moins celles d'entre elles qui contiennent le même nombre de classes, contenant elles-mêmes le même nombre de lettres); P' désignant un produit de substitutions P'_1, P'_2, ... opérées respectivement entre les classes de la première bi-classe, entre celles de la seconde, etc.; 5° que les substitutions P'_1, P'_2, ... appartiendront respectivement aux groupes linéaires de degrés $p'^{\mu'_1}$, $p'^{\mu'_2}$, ...

Considérons le groupe H'' formé par les substitutions partielles AC. Si le groupe I'' formé par celles de ses substitutions où $A = 1$ contient des substitutions autres que l'unité, on pourra répéter encore ces raisonnements et grouper les bi-classes en tri-classes, et ainsi de suite. Admettons donc, pour fixer les idées en évitant des complications inutiles, que I'' se réduise à la substitution 1.

Groupons les bi-classes en catégories, en réunissant celles que les substitutions C permutent entre elles. Chacune des substitutions C sera un produit de substitutions partielles C_1, C_2, ... opérées respectivement entre les bi-classes de la première catégorie, celles de la seconde catégorie, etc. Et les substitutions de H seront de la forme

$$ACP'P = AC_1C_2\ldots P'_1P'_2\ldots P_1P_2\ldots.$$

Chacun des groupes $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, ... respectivement formés par les substitutions partielles C_1, par les substitutions C_2, etc., se réduira à la seule substitution 1, si la catégorie correspondante n'a qu'une bi-classe; sinon il contiendra des substitutions permutant ses bi-classes. Dans ce dernier cas, il sera isomorphe sans mériédrie au groupe alterné $\mathfrak{A}_l$ formé par les substitutions A.

En effet, si H contenait une substitution dans laquelle A se réduisît à l'unité, sans qu'on eût en même temps $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, ..., I'' contiendrait, contre l'hypothèse, une substitution $C_1C_2\ldots$ différente de l'unité.

D'autre part, si H contient une substitution

$$\Sigma = AC_2\ldots P'P,$$

où C_1, par exemple, se réduise à l'unité, sans qu'il en soit de même de A, il contiendra les transformées de Σ par ses diverses substitutions. Ces transformées, ne déplaçant pas les bi-classes de la première caté-

gorie, seront, comme Σ lui-même, de la forme

$$A C_2 \ldots P' P.$$

En les combinant ensemble, on obtiendra un groupe H_1 de substitutions de la même forme, dans lesquelles A parcourra encore toute la suite des substitutions de $\mathfrak{A}_t$ (car on sait que ce groupe est simple). Mais, par hypothèse, H ne contient pas de sous-groupe jouissant de cette propriété; donc $H_1 = H$: par suite, dans toutes les substitutions de H, on aura $C_1 = 1$: donc C_1 se réduira à l'unité, et la première catégorie ne contiendra qu'une seule bi-classe.

Nous pouvons donc énoncer, comme résultat de cette analyse, la proposition suivante :

Les substitutions de H *sont de la forme*

$$A C_1 C_2 \ldots P'_1 P'_2 \ldots P_1 P_2 \ldots,$$

P_1, P_2, ... *étant des substitutions linéaires opérées sur les* p^{μ_1}, p^{μ_2}, ... *lettres qui constituent respectivement la première classe, la seconde, etc. :*

P'_1, P'_2, ... *des substitutions d'ensemble linéaires, opérées sur les classes en nombre* p'^{μ_1}, p'^{μ_2}, ... *qui constituent respectivement la première bi-classe, la seconde, etc.;*

C_1, C_2, ... *des substitutions d'ensemble, opérées respectivement sur les bi-classes de la première catégorie, de la seconde, etc.;*

A *une substitution opérée sur les* t *lettres* $a_1, \ldots, a_t$.

Les substitutions partielles A *reproduisent le groupe alterné* $\mathfrak{A}_t$: *les substitutions* C_1, *les substitutions* C_2, *etc., forment autant de groupes* $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, ...; *chacun d'eux sera isomorphe sans mériédrie à* $\mathfrak{A}_t$ *si la catégorie correspondante contient plusieurs bi-classes; si elle n'en contient qu'une, il se réduira à l'unité.*

La forme générale des substitutions de H étant ainsi fixée, soit k un entier arbitraire au moins égal à 5 et au plus égal à t.

Soit K le groupe formé par celles des substitutions de H dont le premier facteur A permute entre elles les lettres $a_1, \ldots, a_k$ sans déplacer $a_{k+1}, \ldots, a_t$.

Deux cas seront ici à distinguer :

1° Dans chaque catégorie, le nombre des bi-classes qui ne sont déplacées par aucune des substitutions de K est supérieur à la moitié du nombre total.

2° Il existe au moins une catégorie où le nombre des bi-classes non déplacées ne surpasse pas la moitié du nombre total.

Discutons successivement ces deux hypothèses.

II.

Admettons d'abord la première hypothèse.

Les bi-classes d'une même catégorie contenant toutes le même nombre de lettres, le nombre de lettres contenues dans les bi-classes que K déplace sera moindre que $\frac{n-t}{2}$.

Les substitutions de K seront de la forme

$$\mathrm{A\,R\,P'_i\,P'_{i_1}\ldots P_l\,P_{l_1}\ldots},$$

A désignant une substitution du groupe $\mathfrak{A}_k$ alterné entre k lettres $a_1, \ldots, a_k$ (les diverses substitutions A reproduisant d'ailleurs tout ce groupe);

R une substitution opérée entre les lettres des bi-classes que K déplace;

$\mathrm{P'_i}$, $\mathrm{P'_{i_1}}$, ... des substitutions d'ensemble linéaires, opérées respectivement entre les classes de chacune des bi-classes restantes;

P_l, P_{l_1}, ... des substitutions linéaires, opérées respectivement entre les lettres de chaque classe de ces dernières bi-classes.

Considérons le groupe K′ formé par les substitutions partielles

$$\mathrm{A\,P'_i\,P'_{i_1}\ldots},$$

et les groupes $\mathfrak{P}'_i$, $\mathfrak{P}'_{i_1}$, ... respectivement formés par les substitutions $\mathrm{P'_i}$, par les substitutions $\mathrm{P'_{i_1}}$, ... Deux cas seront à distinguer :

1° L'un au moins des groupes $\mathfrak{P}'_i$, $\mathfrak{P}'_{i_1}$, ..., par exemple $\mathfrak{P}'_i$, admet un groupe composant isomorphe à $\mathfrak{A}_k$.

Les classes permutées par P'_i sont, comme on l'a vu, au nombre de $p'^{\mu'_i}$, p' étant un nombre premier et μ'_i un entier. Chacune d'elles contenant au moins une lettre, on aura $n - t \overline{=} p'^{\mu'_i}$.

D'ailleurs, $\mathfrak{G}'_i$ est contenu dans le groupe linéaire de degré $p'^{\mu'_i}$. Pour qu'il admette un groupe composant isomorphe à $\mathfrak{A}_k$, les conditions suivantes seront nécessaires (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 35 et suivantes)

$$1^\circ \qquad \frac{(p'^{\mu'_i}-1)(p'^{\mu'_i}-p')\ldots(p'^{\mu'_i}-p'^{\mu'_i-1})}{\delta(p'-1)}$$

(δ désignant le plus grand commun diviseur de μ'_i et de $p-1$) doit être divisible par $\frac{1.2\ldots k}{2}$;

$$2^\circ \qquad \mu'_i \overline{>} q - 1$$

(q désignant le plus grand nombre premier autre que p' et inférieur à $k-1$);

$$3^\circ \qquad \mu'_i \overline{>} k - \frac{\log k}{\log 2} - 3.$$

Comme p' est au moins égal à 2, cette dernière inégalité donne

$$n - t \overline{>} p'^{\mu'_i} \overline{>} 2^{k - \frac{\log k}{\log 2} - 3}.$$

Cette inégalité pourra suffire en général [1].

---

[1] Pour les petites valeurs de k, on pourra recourir aux autres relations.

Ainsi, pour $k = 5$ ou 6, μ'_i sera au moins égal à 2 (2e relation), à moins qu'on n'ait $p' = 3$, $\mu'_i = 1$. La première relation montre que cette hypothèse est inadmissible, ainsi que les suivantes $p'^{\mu'_i} = 2^2, 2^3, 3^2$. D'ailleurs, 2^5 est moindre que 3^3 et que 5^2. Donc $p'^{\mu'_i}$, et *a fortiori* $n - t$, ne peut être moindre que 2^5.

Il en est de même à plus forte raison si $k = 7$ ou 8.

Si $k = 9$, $\mu'_i \overline{>} 6$, à moins qu'on n'ait $p' = 7$, $\mu'_i \overline{>} 4$. Mais $7^4 > 2^6$. Donc $n - t \overline{>} 2^6$.

Si $k = 10$, $\mu'_i \overline{>} 6$, à moins qu'on n'ait $p' = 7$, $\mu'_i \overline{>} 4$. La première relation exclut les hypothèses $p'^{\mu'_i} = 2^6$ ou 2^7. D'ailleurs, 2^8 est moindre que 3^6 et que 7^4. Donc $n - t \overline{>} 2^8$.

Si $k = 11$, on trouvera $n - t \overline{>} 2^{10}$; ....

2° Supposons, au contraire, qu'aucun des groupes $\mathfrak{P}'_t$, $\mathfrak{P}'_{t_1}$, ... n'ait de groupe composant isomorphe à $\mathfrak{A}_k$. Le groupe K′ contiendra toutes les substitutions de $\mathfrak{A}_k$ (*Bulletin de la Société mathématique*, p. 50). Le groupe K contiendra des substitutions correspondantes, de la forme

$$\mathrm{ARP}_t\mathrm{P}_{t_1}\ldots,$$

dans lesquelles A parcourt encore toute la suite des substitutions de $\mathfrak{A}_k$.

Les groupes $\mathfrak{P}_t$, $\mathfrak{P}_{t_1}$, ..., respectivement formés par les substitutions partielles P_t, par les substitutions P_{t_1}, etc. sont contenus dans des groupes linéaires de degrés p^{μ_t}, $p^{\mu_{t_1}}$, ... Si l'un d'eux, par exemple $\mathfrak{P}_t$, admet un groupe composant isomorphe à $\mathfrak{A}_k$, on trouvera pour le nombre $n - t \geqq p^{\mu_t}$ la même limite inférieure que tout à l'heure.

L'hypothèse contraire est d'ailleurs inadmissible. Car K contiendrait des substitutions de la forme

$$\mathrm{AR},$$

où A parcourrait toute la suite des substitutions de $\mathfrak{A}_k$. Il contiendrait en particulier une substitution Σ dans laquelle A se réduirait à la substitution circulaire ternaire $(a_1 a_2 a_3)$. Le nombre des lettres déplacées par Σ serait moindre que $3 + \frac{n-t}{2}$ et, *a fortiori* (t étant $\geqq 8$), moindre que $\frac{n}{2} - 1$; il serait donc moindre que u, ce qui est contraire à l'hypothèse que u est la classe de G.

On aura donc nécessairement, dans le cas que nous venons de discuter,

$$n - t \geqq 2^{k - \frac{\log k}{\log 2} - 3},$$

d'où

$$\log(n - t) \geqq (k - 3)\log 2 - \log k.$$

III.

Supposons, contrairement à l'hypothèse examinée dans la Section précédente, qu'il existe au moins une catégorie, la première par exemple, dans laquelle les bi-classes non déplacées par K ne forment

pas plus de la moitié du nombre total. Cette catégorie contiendra nécessairement plusieurs bi-classes, que nous désignerons par c_1, $c_2, \ldots, c_{n'}$.

Les substitutions de H sont (§ I) de la forme

$$AC_1C_2, \ldots, P'P = AC_1Q,$$

les substitutions partielles A reproduisant tout le groupe alterné $\mathcal{A}_t$ et les substitutions C_1 un groupe $\mathcal{C}_1$ isomorphe sans mériédrie à $\mathcal{A}_t$, et d'ordre $\frac{t!}{2}$ comme ce dernier. Quant aux substitutions Q, elles ne déplacent pas les bi-classes $c_1, \ldots, c_{n'}$.

Soit $\mathcal{C}_{11}$ le sous-groupe d'ordre $\frac{t!}{2n'}$ formé par celles des substitutions de $\mathcal{C}_1$ qui ne déplacent pas c_1. Soit μ le nombre des bi-classes $c_1, \ldots, c_\mu$ que toutes les substitutions de $\mathcal{C}_1$ laissent immobiles. Les bi-classes $c_1, \ldots, c_{n'}$ pourront se répartir μ à μ en $\frac{n'}{\mu} = \nu$ systèmes $s_1, \ldots, s_\nu$, tels que toute substitution de $\mathcal{C}_1$ qui laisse immobile une bi-classe laissera aussi immobiles toutes celles de son système [1].

Les substitutions de $\mathcal{C}_1$ seront de la forme

$$DS_1S_2\ldots S_\nu,$$

D étant une substitution d'ensemble effectuée sur les ν systèmes; S_1, $S_2, \ldots$ des substitutions effectuées dans l'intérieur de chaque système entre les bi-classes qui le composent.

Les substitutions de H et, en particulier, celles de K seront donc de la forme

$$ADS_1S_2\ldots Q.$$

Deux cas seront à distinguer ici :

Premier cas. — *Ceux des systèmes $s_1, s_2, \ldots$ qui ne sont déplacés par aucune des substitutions de* K *forment plus de la moitié du nombre total.*

---

[1] L'un des nombres μ, ν pourrait se réduire à l'unité sans que notre analyse cessât de s'appliquer.

Les substitutions de K pourront se mettre sous la forme

$$\mathrm{ARS}_i\mathrm{S}_{i_1}\ldots\mathrm{Q},$$

A désignant une substitution entre les lettres $a_1, \ldots, a_k$;

R une substitution opérée entre les bi-classes des systèmes que K déplace;

$\mathrm{S}_i, \mathrm{S}_{i_1}, \ldots$ des substitutions opérées respectivement entre les bi-classes de chacun des systèmes non déplacés s_i, s_{i_1}.

Le groupe alterné $\mathfrak{A}_k$ formé par les substitutions A et le groupe Γ formé par les substitutions $\mathrm{RS}_i\mathrm{S}_{i_1}\ldots$ sont des sous-groupes correspondants pris dans les deux groupes $\mathfrak{A}_\ell$ et C_1, qui sont isomorphes sans mériédrie; ils sont isomorphes l'un à l'autre, sans mériédrie; Γ sera donc simple et d'ordre $\frac{k!}{2}$, comme $\mathfrak{A}_k$.

Cela posé, soient $s_i, s_{i_1}, \ldots$ les groupes respectivement formés par les substitutions partielles S_i, par les substitutions S_{i_1}, etc. Le groupe Γ admet évidemment comme facteurs de composition ceux de s_i; donc s_i est simple, et d'ordre $\frac{k!}{2}$, s'il ne se réduit pas à la seule substitution 1, de même pour $s_{i_1}, \ldots$.

Mais les groupes $s_i, s_{i_1}, \ldots$ ne peuvent se réduire tous à la substitution 1; car les substitutions de K, se réduisant à la forme

$$\mathrm{ARQ},$$

laisseraient immobiles les bi-classes des systèmes s_i, s_{i_1}, lesquelles forment plus de la moitié du nombre total des bi-classes de la première catégorie; résultat contraire à notre hypothèse.

Nous devons donc admettre que l'un, au moins, des groupes s_i, $s_{i_1}, \ldots$, par exemple, s_i soit d'ordre $\frac{k!}{2}$. Or, les substitutions de s_i sont opérées entre les μ bi-classes du système s_i, lesquelles jouissent de la propriété que toute substitution de C_1, qui laisse l'une d'elles immobile, ne déplace pas les autres. L'ordre de s_i ne peut donc surpasser μ, d'où l'inégalité

$$\mu \geqq \frac{k!}{2}.$$

D'ailleurs, le nombre total des lettres qui figurent dans s_i ne surpasse pas $n - t$, et chaque bi-classe en contient au moins une: on aura donc *a fortiori*

$$n - t \geqq \mu \geqq \frac{k!}{2},$$

d'où

$$\log(n - t) \geqq \log k! - \log 2.$$

Or, d'après une formule classique de la théorie des fonctions eulériennes, $\log k!$ est égal à $(k + \frac{1}{2})\log k - k + \frac{1}{2}\log 2\pi + \rho$, le reste ρ étant compris entre o et $\frac{1}{12k}$.

Donc

$$\log(n - t) > (k + \tfrac{1}{2})\log k - k + \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \log 2.$$

Le nombre k étant $\geqq 5$, cette limite sera plus élevée que la suivante

$$\log(n - t) > (k - 3)\log 2 - \log k,$$

trouvée précédemment dans l'hypothèse traitée dans le § II. Cette dernière limite est donc également applicable au cas actuel.

Deuxième cas. — *Ceux des systèmes $s_1, s_2, \ldots$ que* K *ne déplace pas ne forment pas plus de la moitié du nombre total.*

Le sous-groupe $\mathfrak{S}_{11}$, formé par celles des substitutions de $\mathfrak{S}_1$ qui ne déplacent pas les bi-classes du système s_1, admet ν transformés distincts par les substitutions de $\mathfrak{S}_1$. Ces transformés $\mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{12}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ seront respectivement formés par celles des substitutions de $\mathfrak{S}_1$ qui laissent immobiles les bi-classes de s_1, celles de s_2, etc.; et chaque substitution de $\mathfrak{S}_1$ transformera ces sous-groupes les uns dans les autres de la même manière qu'elle permute les systèmes correspondants s_1, $s_2, \ldots$. Si donc elle est permutable à l'un de ces sous-groupes, elle ne déplacera pas le système correspondant.

Donc ceux des sous-groupes $\mathfrak{S}_{11}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ auxquels toutes les substitutions de K sont permutables ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

Cela posé, le groupe $\mathfrak{S}_1$ étant isomorphe sans mériédrie au groupe $\mathfrak{A}_t$,

aux sous-groupes $\mathfrak{S}_{11}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ correspondront dans $\mathfrak{A}_t$ des sous-groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$, qui seront transformés les uns dans les autres par les substitutions de $\mathfrak{A}_t$ de la même manière que $\mathfrak{S}_{11}, \ldots, \mathfrak{S}_{1\nu}$ le sont par les substitutions correspondantes de $\mathfrak{S}_1$.

Donc ceux des sous-groupes $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ auxquels les substitutions du groupe $\mathfrak{A}_k$ (isomorphe à K) sont permutables, ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

D'ailleurs l'ordre Ω du groupe Γ_1 est égal à $\frac{t!}{2n'}$, ordre de $\mathfrak{S}_{11}$; et, chaque bi-classe contenant au moins une lettre, on a $n - t \geqq n'$; donc

$$n - t \geqq \frac{t!}{2\Omega},$$

Ω désignant l'ordre d'un sous-groupe Γ_1 contenu dans $\mathfrak{A}_t$; ce sous-groupe Γ_1 étant d'ailleurs assujetti à la condition que ceux de ses transformés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ qui sont permutables à toutes les substitutions de $\mathfrak{A}_k$ ne forment pas plus de la moitié du nombre total.

Pour discuter cette formule, groupons les lettres $a_1, \ldots, a_t$ en classes, en réunissant celles que Γ_1 permute transitivement. Soient respectivement $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ le nombre des lettres qu'elles contiennent; on aura

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots = t,$$

et les substitutions de Γ_1 seront de la forme

$$G_1 G_2 \ldots,$$

$G_1, G_2, \ldots$ étant des substitutions partielles opérées respectivement sur les lettres de chaque classe.

Soient Ω_1 l'ordre du groupe Γ_{11} formé par les substitutions G_1; Ω_2 celui du groupe Γ_{12} formé par les substitutions G_2; etc. Le groupe Γ'_1, dérivé de la combinaison de toutes ces substitutions, aura pour ordre $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$. Mais il contient évidemment Γ_1. Donc Ω divise $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$. Il divisera même $\frac{1}{2}\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ si l'un des groupes $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{A}_t$; car Γ_1, étant contenu dans ce dernier groupe, le sera dans le groupe d'ordre $\frac{1}{2}\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ formé par les substitutions communes à Γ'_1 et à $\mathfrak{A}_t$.

Nous aurons donc

$$n - t \geqq \frac{t!}{r\Omega_1\Omega_2\ldots},$$

r étant égal à 2 ou à 1, suivant que les groupes $\Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \ldots$ sont tous contenus dans $\mathfrak{G}_t$ ou non.

Cela posé, considérons l'expression

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}.$$

C'est une fonction de x, qui s'annule pour $x = k-1$; à partir de ce moment, elle est positive et croissante; pour $x = t$ elle devient égale à 1. L'équation

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} = \frac{1}{2}$$

admet donc une racine ξ comprise dans l'intervalle de $k-1$ à t.

On a évidemment

$$\frac{\xi}{t} > \frac{\xi-1}{t-1} > \ldots > \frac{\xi-k+1}{t-k+1},$$

d'où

$$\left(\frac{\xi}{t}\right)^k > \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} > \frac{1}{2},$$

$$\left(\frac{\xi-k+1}{t-k+1}\right)^k < \frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} < \frac{1}{2}.$$

La première inégalité donne

$$\xi > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} t > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t,$$

quantité plus grande que $\frac{2}{3}t$ et que $\frac{1}{2}t + 1$ (t étant > 4).

On déduit de la seconde

$$\frac{\xi-k+1}{t-k+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k}} < e^{-\frac{1}{k}\log 2} < \frac{1}{1+\frac{1}{k}\log 2}.$$

d'où

$$\frac{\xi - t}{t - k + 1} < \frac{-\frac{1}{k}\log 2}{1 + \frac{1}{k}\log 2},$$

$$t - \xi > \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2},$$

$$\xi < t - \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2}.$$

Soit δ le plus grand nombre entier inférieur à la quantité

$$\eta = t - \frac{(t - k + 1)\log 2}{k + \log 2};$$

on aura, d'une part

$$\delta < t,$$

et d'autre part,

$$\delta > \xi - 1 \geqq k - 1 \geqq 4;$$

$$\delta > \frac{2}{3}t - 1 > \frac{1}{2}t.$$

Ces préliminaires posés, nous pouvons établir le théorème suivant :

Si l'un des entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$, par exemple γ_1, est supérieur à δ, le groupe correspondant Γ_{11} ne pourra contenir le groupe $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$ alterné entre les γ_1 lettres $a_1, \ldots, a_{\gamma_1}$ que Γ_{11} déplace.

Supposons en effet que γ_1 soit $> \delta$, et, par suite, $> \frac{1}{2}t$, et que Γ_{11} contienne $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$. Il admettra le facteur de composition $\frac{\gamma_1!}{2}$ (précédé du facteur 2 si Γ_{11} est le groupe symétrique). Quant à $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \ldots$, leurs facteurs de composition divisant respectivement $\gamma_2!, \gamma_3!, \ldots$ seront moindres que $\frac{\gamma_1!}{2}$ $\left(\text{car } \gamma_1 > \frac{1}{2}t > \gamma_2 + \gamma_3 + \ldots\right)$. Si donc nous supprimons tous ceux des facteurs de composition de Γ_1 qui sont moindres que $\frac{\gamma_1!}{2}$, nous obtiendrons comme sous-groupe de Γ_1 le groupe alterné $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$. Ce sous-groupe est évidemment le seul groupe alterné entre γ_1 lettres qui soit contenu dans Γ_1.

Chacun des transformés $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ du groupe Γ_1 contient de même un groupe alterné entre γ_1 lettres prises parmi les lettres $a_1, \ldots, a_t$. Supposons que, parmi eux, il y en ait M qui contiennent le même groupe alterné $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$. Il y en aura également M qui contiennent chacun des groupes alternés transformés de $\mathfrak{A}_{\gamma_1}$. Le nombre de ceux-ci étant évidemment égal au nombre des combinaisons de t lettres γ_1 à γ_1, le nombre ν des transformés de Γ_1 sera

$$M\frac{t(t-1)\ldots(t-\gamma_1+1)}{1.2\ldots\gamma_1}.$$

Le groupe $\mathfrak{A}_k$ sera contenu dans tous ceux de ces transformés qui contiennent un groupe alterné entre γ_1 lettres, parmi lesquelles figurent $a_1, \ldots, a_k$. Ceux-ci sont au nombre de

$$M\frac{(t-k)(t-k-1)\ldots(t-\gamma_1+1)}{1.2\ldots(\gamma_1-k)}$$

et contenant $\mathfrak{A}_k$, ils seront tous permutables à ses substitutions.

Le nombre des groupes de la suite $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\nu$ qui sont permutables aux substitutions de $\mathfrak{A}_k$ sera donc une fraction du nombre total au moins égale à

$$\frac{\gamma_1(\gamma_1-1)\ldots(\gamma_1-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)}.$$

Mais on a, par hypothèse,

$$\gamma_1 \overset{=}{>} \delta + 1 \overset{=}{>} \eta > \xi.$$

La fraction précédente sera donc plus grande que

$$\frac{\xi(\xi-1)\ldots(\xi-k+1)}{t(t-1)\ldots(t-k+1)} = \frac{1}{2},$$

résultat contraire à l'hypothèse que nous discutons.

Nous sommes maintenant en mesure d'assigner facilement une limite inférieure à la valeur de $n-t$. Nous distinguerons trois cas dans cette discussion.

Premier sous-cas. — *Aucun des nombres* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ *ne surpasse* δ.

Le nombre Ω_1 divise la factorielle $\gamma_1!$ il divise même $\frac{\gamma_1!}{2}$ si Γ_{11} est contenu dans le groupe alterné. De même, Ω_2 divise $\gamma_2!$ $\left(\text{ou } \frac{\gamma_2!}{2}\right)$; etc. Donc $r\Omega_1\Omega_2\ldots$ divise $\gamma_1!\gamma_2!\ldots$, et l'on aura

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\gamma_1!\gamma_2!\ldots}.$$

D'ailleurs, si $\gamma_1 \overset{=}{>} \gamma_2$, on aura évidemment

$$\gamma_1!\gamma_2! < (\gamma_1+1)!(\gamma_2-1)!$$

La limite inférieure trouvée ci-dessus prendra donc sa plus petite valeur dans la supposition

$$\gamma_1 = \delta, \qquad \gamma_2 = t - \delta, \qquad \gamma_3 = \gamma_4 = \ldots = 0.$$

On aura ainsi, dans tous les cas,

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\delta!(t-\delta)!}.$$

Posons

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)\log t - t + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12t}.$$

On a, d'après la formule connue qui donne la valeur approchée de $\log\Gamma(t+1)$,

$$\varphi(t) - \frac{1}{12t} < \log t! < \varphi(t)$$

et, par suite,

$$\log(n-t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta).$$

Cette expression, que nous représenterons par $f(\delta)$, est une fonction décroissante de δ $\left(\delta \text{ étant} > \frac{t}{2}\right)$. Car sa dérivée

$$-\log\delta - \frac{1}{2\delta} + \frac{1}{12\delta^2} + \log(t-\delta) + \frac{1}{2(t-\delta)} + \frac{1}{12(t-\delta)^2}$$

s'annule pour $\delta = \frac{t}{2}$, et devient ensuite négative, la dérivée seconde

$$-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2\delta^2} - \frac{1}{6\delta^3} - \frac{1}{t-\delta} + \frac{1}{2(t-\delta)^2} - \frac{1}{6(t-\delta)^3}$$

étant négative

Deuxième cas. — *Le nombre* γ_1 *surpasse* δ; *mais le groupe* Γ_{11} *n'est pas primitif*.

Soient

α le nombre des systèmes entre lesquels les lettres de Γ_{11} se partagent;
$\frac{\gamma_1}{\alpha}$ le nombre des lettres de chaque système;
$r\Omega_1$ divisera $\alpha!\left[\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right)!\right]^\alpha$;
$\Omega_2\Omega_3\ldots$ divisera $(t-\gamma_1)!$

On aura donc

$$n - t \overset{=}{>} \frac{t!}{\alpha!\left[\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right)!\right]^\alpha (t-\gamma_1)!};$$

d'où

$$\log(n-t) > \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\alpha) - \alpha\varphi\left(\frac{\gamma_1}{\alpha}\right) - \varphi(t-\gamma_1),$$

si $t - \gamma_1 > 0$. Cette formule subsistera encore pour $t - \gamma_1 = 0$, si l'on convient de poser $\varphi(0) = 0$.

Désignons par $F(\gamma_1, \alpha)$ le second membre de l'inégalité précédente. Le nombre α, divisant γ_1, ne pourra prendre que des valeurs comprises entre 2 et $\frac{\gamma_1}{2}$. Cherchons le minimum de F, lorsque α varie d'une manière continue entre ces limites.

La dérivée seconde

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\gamma_1 - \frac{1}{2}}{\alpha^2} - \frac{1}{6\alpha^3} - \frac{1}{6\gamma_1},$$

étant constamment négative, le minimum cherché ne pourra avoir lieu que pour l'une des valeurs extrêmes 2, $\frac{\gamma_1}{2}$. Ce sera pour $\alpha = 2$.

En effet, la différence

$$F\left(\gamma_1, \frac{\gamma_1}{2}\right) - F(\gamma_1, 2) = \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \left(\frac{\gamma_1}{2} - 1\right)\varphi(2)$$

s'annule pour $\gamma_1 = 4$. Elle sera positive si $\gamma_1 > 4$, car sa dérivée

$$\frac{1}{2}\left(\log\frac{\gamma_1}{2} + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{3\gamma_1^2}\right) - \frac{1}{2}\varphi(2)$$

est positive. Or γ_1, étant $> \delta$, est par là même > 4.

On aura donc

$$\log(n - t) > F(\gamma_1, 2).$$

Supposons que γ_1, qui par hypothèse est $\overset{=}{>} \delta + 1$, varie de $\delta + 1$ à $t - 1$ et cherchons le minimum de cette expression. Sa dérivée

$$-\varphi'\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) + \varphi'(t - \gamma_1)$$

est négative si $\frac{\gamma_1}{2} \overset{=}{<} t - \gamma_1$, d'où $\gamma_1 \overset{=}{>} \frac{2}{3}t$. Cette circonstance se présentera dans tout le champ, car $\delta + 1 > \frac{2}{3}t$. Le minimum cherché aura donc lieu pour $\gamma_1 = t, -1$ et sera égal à $F(t - 1, 2)$.

Il reste à comparer cette valeur à celle qu'on obtiendrait pour $\gamma_1 = t$, laquelle est $F(t, 2)$.

La différence

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(t-1, 2) - F(t, 2) \\ &\quad = 2\left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \varphi\left(\frac{t-1}{2}\right)\right] - \varphi(1) \\ &\quad = (t+1)\log\frac{t}{2} - t\log\frac{t-1}{2} + \frac{1}{3t} - \frac{1}{3(t-1)} - \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

est une fonction croissante de t, déjà positive pour sa valeur minimum $t = 8$.

Le minimum de $\log(n-t)$ sera donc

$$\begin{aligned}
F(t,2) &= \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(2) - 2\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \left(t+\tfrac{1}{2}\right)\log t - t + \tfrac{1}{2}\log 2\pi \\
&\quad - \left(2+\tfrac{1}{2}\right)\log 2 + 2 - \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \tfrac{1}{24} \\
&\quad - (t+1)\log\frac{t}{2} + t - \log 2\pi - \frac{1}{3t} \\
&= t\log 2 - \tfrac{1}{2}\log t - \frac{1}{3t} + 2 - \tfrac{1}{24} - \tfrac{3}{2}\log 2 - \log 2\pi.
\end{aligned}$$

Cette limite est évidemment plus grande que $(t-3)\log 2 - \log t$, et, *a fortiori*, que $(k-3)\log 2 - \log k$, k étant un nombre quelconque > 4, mais $\overline{\overline{<}}\, t$. On doit donc la rejeter, comme moins précise que celle obtenu par la discussion du § II.

Troisième sous-cas. — *Le nombre* γ_1 *est* $> \delta$; Γ_{11} *est primitif, mais ne contient pas le groupe alterné.*

Le groupe Γ_{11} ne contenant dans ce cas aucune substitution circulaire ternaire, son ordre Ω_1 ne pourra surpasser $\frac{\gamma_1!}{m!}$, m étant le plus grand entier contenu dans $\frac{\gamma_1+1}{2}$ (Bochert, *Mathematische Annalen*, t. XXXIII, p. 584). D'autre part, si $t-\gamma_1 > 1$, $r\Omega_2\Omega_3\ldots$ divisera $(t-\gamma_1)!$; et si $t-\gamma_1 = 1$ ou 0, $\Omega_2\Omega_3\ldots$ se réduira à l'unité, mais r pourra être égal à 2. On a enfin dans tous les cas

$$\log m! > \varphi(m) - \frac{1}{12m} > \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \frac{1}{6\gamma_1},$$

car $m \overline{\overline{>}} \frac{\gamma_1}{2}$, et $\varphi(x) - \frac{1}{12x}$ est une fonction croissante.

Posant donc, pour abréger,

$$\varphi(t) - \frac{1}{12t} + \varphi\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) - \frac{1}{6\gamma_1} - \varphi(\gamma_1) - \varphi(t-\gamma_1) = \psi(\gamma_1),$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
&\log(n-t) > \psi(\gamma_1) && \text{si} \quad \gamma_1 < t-1, \\
&\log(n-t) > \psi(t-1) - \log 2 && \text{si} \quad \gamma_1 = t-1.
\end{aligned}$$

Enfin, si $\gamma_1 = t$, on aura

$$m \overset{=}{>} \frac{t}{2}, \qquad \log m! \overset{=}{>} \log\Gamma\left(\frac{t}{2}+1\right),$$

$$\log(n-t) \overset{=}{>} \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{6t} - \log 2.$$

Lorsque γ_1 varie de δ à $t-1$, la dérivée seconde

$$\psi''(\gamma_1) = -\frac{1}{2\gamma_1} + \frac{1}{6\gamma_1^3} - \frac{1}{t-\gamma_1} + \frac{1}{2(t-\gamma_1)^2} - \frac{1}{6(t-\gamma_1)^3}$$

sera négative. Le minimum de $\psi(\gamma_1)$ aura donc lieu pour $\gamma_1 = \delta$ ou $t-1$; $\log(n-t)$ sera donc supérieur à la plus petite des trois quantités

$$\psi(\delta), \quad \psi(t-1) - \log 2, \quad \varphi\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{6t} - \log 2.$$

La première de ces limites $\psi(\delta)$ pourra être rejetée, car elle est supérieure à la limite $f(\delta)$ obtenue pour le premier cas : on a en effet

$$\psi(\delta) - f(\delta) = \varphi\left(\frac{\delta}{2}\right) - \frac{1}{6\delta}$$

expression dont la dérivée est positive, et qui l'est elle-même dès que $\delta = 4$.

Les deux autres limites sont également à rejeter, car elles sont supérieures à $(t-3)\log 2 - \log t$, et *a fortiori* à $(k-3)\log 2 - \log k$ si $k < t$. On a en effet

$$\begin{aligned}
&\psi(t-1) - \log 2 - (t-3)\log 2 + \log t \\
&\quad = (t+\tfrac{1}{2})\log t - t + \frac{t}{2}\log\frac{t-1}{2} - \frac{t-1}{2} \\
&\qquad - (t-\tfrac{1}{2})\log(t-1) + (t-1) - \frac{1}{12(t-1)} + 1 - \tfrac{1}{12} \\
&\qquad - \log 2 - (t-3)\log 2 + \log t.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log\frac{t-1}{2} - (t-\tfrac{1}{2})\log(t-1) = -\frac{t}{2}\log 2 - \frac{t-1}{2}\log(t-1) \\
&\quad = -\frac{t}{2}\log 2 - \frac{t-1}{2}\log t - \frac{t-1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$

Mais

$$-\frac{t-1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t}\right)>\frac{t-1}{2}\,\frac{1}{t}>\frac{1}{2}-\frac{1}{2t}.$$

Substituant cette valeur, on voit que la différence cherchée est plus grande que

$$\left(\frac{t}{2}+2\right)\log t-(1+3\log 2)\frac{t}{2}+\frac{5}{12}+2\log 2-\frac{1}{2t}-\frac{1}{12(t-1)},$$

quantité évidemment positive.

On a d'autre part

$$\begin{aligned}&\varphi\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{6t}-\log 2-(t-3)\log 2+\log t\\&\quad=\frac{t+3}{2}\log t-\frac{1+3\log 2}{2}t+\frac{3}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log 2\pi+\log t,\end{aligned}$$

quantité évidemment positive.

IV.

En réunissant les résultats des deux Sections précédentes, nous pouvons formuler le théorème suivant :

Soit G *un groupe de classe* u, *et au moins* t *fois transitif* ($t\geqq 8$), *et ne contenant pas le groupe alterné.*

Soit k *un entier* >4 *et* $\leqq t$, *choisi à volonté;* δ *le plus grand entier qui satisfasse à l'inégalité*

$$\delta<t-\frac{(t-k+1)\log 2}{k+\log 2}.$$

Posons en outre

$$\varphi(t)=(t+\tfrac{1}{2})\log t-t+\tfrac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12t}.$$

On aura nécessairement l'une des deux inégalités suivantes

$$(2)\qquad \begin{cases}\log(n-t)\leqq(k-3)\log 2-\log k,\\ \log(n-t)>\varphi(t)-\dfrac{1}{12t}-\varphi(\delta)-\varphi(t-\delta).\end{cases}$$

Il nous reste à déterminer l'entier arbitraire k de manière à obtenir une limite aussi élevée que possible.

Si nous faisons croître k d'une manière continue de 5 à t, δ croîtra et $\varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta)$ décroîtra. Au contraire, l'expression $(k-3)\log 2 - \log k$ sera croissante, et finira par dépasser l'autre. On obtiendra donc le meilleur résultat possible en assignant à k l'une des deux valeurs entières entre lesquelles se trouve comprise la racine de l'équation

$$(k-3)\log 2 - \log k = \varphi(t) - \frac{1}{12t} - \varphi(\delta) - \varphi(t-\delta).$$

Cherchons à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la limite inférieure de $\log(n-t)$ lorsque t est très grand.

Faisons tendre k vers l'infini en même temps que t, mais moins rapidement; la valeur principale de $(k-3)\log 2 - \log k$ sera $k\log 2$; celle de δ sera t; celle de $t-\delta$ sera $\frac{t\log 2}{k}$. Pour trouver celle de

$$\begin{aligned}
&\varphi(t) - \frac{1}{12t}\varphi(\delta) - \varphi(t-\delta)\\
&\quad = (t+\tfrac{1}{2})\log t - (\delta+\tfrac{1}{2})\log\delta\\
&\qquad - (t-\delta+\tfrac{1}{2})\log(t-\delta) - \tfrac{1}{2}\log 2\pi - \frac{1}{12\delta} - \frac{1}{12(t-\delta)},
\end{aligned}$$

remplaçons $\log\delta$ par

$$\log t + \log\left(1 - \frac{t-\delta}{t}\right) = \log t - \frac{t-\delta}{t} - \frac{(t-\delta)^2}{2t^2} - \ldots.$$

Le terme prépondérant dans l'expression ainsi transformée sera $(t-\delta)\log t$, dont la valeur principale est

$$\frac{t\log 2}{k}\log t.$$

Elle deviendrait égale à $k\log 2$, si l'on posait

$$k = \sqrt{t\log t}.$$

Si nous prenons pour k une valeur entière voisine de ce dernier nombre, les deux expressions (2), et par suite la limite inférieure de $\log(n-t)$, seront de la forme

$$\sqrt{t\log t}\log 2(1+\varepsilon),$$

ε étant un infiniment petit.

Sur la division algébrique appliquée aux polynomes homogènes;

PAR M. H. ANDOYER.

---

1. Soient g et f deux formes binaires des degrés n et p par rapport aux variables homogènes x_1 et x_2. Soient y_1 et y_2 un autre couple d'indéterminées, covariantes aux premières, et posons, pour abréger l'écriture,

$$(xy) = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

$$(xy)^m = x_1^m Y_0^{(m)} + x_1^{m-2} x_2 Y_1^{(m)} + \ldots + x_2^m Y_m^{(m)},$$

de sorte que, d'une façon générale, on a

$$Y_p^{(m)} = (-1)^p \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} y_1^p y_2^{m-p}.$$

En supposant $n \geqq p$, on peut déterminer deux formes q et f_1, respectivement des degrés $n-p$ et $p-1$ par rapport aux variables x, telles que l'on ait l'identité

$$g + fq + (xy)^{n-p+1} f_1 = 0.$$

Cette opération, qui est une généralisation naturelle de la division algébrique, est possible et possible d'une seule façon.

Soit en effet

$$\begin{aligned}
g &= a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} x_2 + \ldots + a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n, \\
f &= b_0 x_1^p + b_1 x_1^{p-1} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_p x_2^p, \\
f_1 &= \alpha_0 x_1^{p-1} + \alpha_1 x_1^{p-2} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{p-1} x_2^{p-1}, \\
q &= \beta_0 x_1^{n-p} + \beta_1 x_1^{n-p-1} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_{n-p} x_2^{n-p},
\end{aligned}$$

les α et β étant des coefficients indéterminés.

Si l'on écrit les équations d'identification, et que l'on élimine les coefficients inconnus entre ces équations et les deux relations écrites en dernier lieu, on trouve immédiatement sous forme de déterminants deux équations propres à déterminer q et f_1.

Pour plus de netteté dans l'écriture des déterminants, nous représenterons par la notation

$$\begin{array}{c}
a_0 \ldots\ldots\ldots \\
\vdots \quad (\lambda, \mu) \quad \vdots \\
\ldots\ldots\ldots a_n
\end{array}$$

un tableau rectangulaire de λ lignes et μ colonnes composé de la façon suivante : la première colonne contient les éléments a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n, puis des zéros; la seconde colonne contient d'abord un zéro, puis les éléments a_0, a_1, ..., a_n et est terminée par des zéros; la troisième colonne contient d'abord deux zéros, puis les éléments a_0, a_1, ..., a_n, et est terminée par des zéros; et ainsi de suite. On a d'ailleurs la relation évidente

$$\lambda - \mu = n.$$

Ceci posé, les équations propres à déterminer q et f_1, sont

$$0 = \begin{vmatrix}
0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & -q & x_1^{n-p} & x_1^{n-p-1} x_2 & \ldots & x_2^{n-p} \\
\Upsilon_0^{(n-p+1)} & \ldots\ldots & a_0 & b_0 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\vdots & \vdots & a_1 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & (n+1, p) \quad \vdots & \vdots & \vdots & & (n+1, n-p+1) & \vdots \\
\vdots & \ldots\ldots\ldots \Upsilon_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \vdots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & b_p
\end{vmatrix}$$

et

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^{p-1} \; x_1^{p-2} x_2 \ldots x_2^{p-1} & -f_1 & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1, n-p+1) & \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & b_p \end{vmatrix}.$$

Le coefficient de $-q$ ou $-f_1$ dans les seconds membres est, au facteur $(-1)^p$ près, le résultant des deux formes f et $(xy)^{n-p+1}$, et par suite est égal à $(-1)^p[f(y)]^{n-p+1}$, en désignant en général par $\varphi(y)$ ce que devient la fonction φ des variables x_1 et x_2, quand on y fait $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Par suite, on a

$$(-1)^p[f(y)]^{n-p+1} q$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots \quad 0 & 0 & x_1^{n-p} \quad x_1^{n-p-1} x_2 \quad \ldots \quad x_2^{n-p} \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1, n-p+1) \quad \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix},$$

$$(-1)^p[f(y)]^{n-p+1} f_1$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{p-1} \; x_1^{p-2} x_2 \ldots x_2^{p-1} & 0 & 0 \quad 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ Y_0^{(n-p+1)} \ldots\ldots & a_0 & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+1, p) \quad \vdots & a_1 & \vdots \quad (n+1, n-p+1) \quad \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots Y_{n-p+1}^{(n-p+1)} & a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix},$$

ce qui démontre la proposition annoncée.

2. Comme (xy) est un covariant, il résulte de la proposition précédente que q et f_1 sont des covariants simultanés à deux séries de variables des formes g et f; q est même un covariant absolu.

On pourra de même obtenir successivement les identités suivantes,

où, pour la symétrie, on a écrit f_0 et q_0 au lieu de f et q,

$$\begin{aligned}
g + f_0 q_0 + (xy)^{n-p+1} f_1 &= 0,\\
f_0 + f_1 q_1 + (xy)^2 f_2 &= 0,\\
f_1 + f_2 q_2 + (xy)^2 f_3 &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f_{i-1} + f_i q_i + (xy)^2 f_{i+1} &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
f_{p-2} + f_{p-1} q_{p-1} + (xy)^2 f_p &= 0.
\end{aligned}$$

Les q_i (sauf q_0) sont du premier degré par rapport aux x; la fonction f_i est de degré $p - i$ par rapport aux mêmes variables.

Ces fonctions q_i et f_i sont d'ailleurs des covariants simultanés des deux formes données. Les q_i offrent peu d'intérêt : on les éliminera en remplaçant les identités précédentes par de nouvelles identités qui s'en déduisent par un procédé bien connu, et dont la forme générale sera

$$f_i (xy)^{n-p+2i-1} + G_i g + F_i f = 0,$$

les G_i et les F_i étant des fonctions nécessairement covariantes, des degrés $i - 1$ et $n - p + i - 1$ respectivement par rapport aux x.

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
G_0 &= 0, & F_0 &= -(xy)^{n-p-1},\\
G_1 &= 1, & F_1 &= q_0.
\end{aligned}$$

De la relation générale

$$(xy)^2 f_{i+1} + f_i q_i + f_{i-1} = 0,$$

on tire

$$\begin{aligned}
G_{i+1} + G_i q_i + (xy)^2 G_{i-1} &= 0,\\
F_{i+1} + F_i q_i + (xy)^2 F_{i-1} &= 0,
\end{aligned}$$

et, par suite,

$$G_i F_{i+1} - F_i G_{i+1} = (xy)^2 (G_{i-1} F_i - F_{i-1} G_i);$$

comme on a en particulier

$$G_0 F_1 - F_1 G_0 = (xy)^{n-p-1},$$

il vient

$$G_i F_{i+1} - F_i G_{i+1} = (xy)^{n-p+2i-1}.$$

Les relations

$$\begin{aligned} f_i (xy)^{n-p+2i-1} &+ G_i g + F_i f = 0, \\ f_{i+1} (xy)^{n-p+2i+1} &+ G_{i+1} g + F_{i+1} f = 0 \end{aligned}$$

donnent alors, en vertu de la précédente,

$$f_i F_{i+1} - (xy)^2 f_{i+1} F_i + g = 0, \qquad f_i G_{i+1} - (xy)^2 f_{i+1} G_i - f = 0.$$

Si maintenant on fait

$$\begin{aligned} f_i &= \alpha_0 x_1^{p-i} + \alpha_1 x_1^{p-i-1} x_2 + \ldots, \\ G_i &= \beta_0 x_1^{i-1} + \beta_1 x_1^{i-2} x_2 + \ldots, \\ F_i &= \gamma_0 x_1^{n-p+i-1} + \gamma_1 x_1^{n-p+i-2} x_2 + \ldots, \end{aligned}$$

et qu'on élimine les coefficients α, β, γ entre ces relations et celles que l'on obtient en écrivant que l'identité fondamentale est vérifiée, on trouve aisément

$$\frac{f_i}{A_i} = \frac{G_i}{B_i} = \frac{F_i}{C_i} = \lambda_i,$$

λ_i étant indépendant des x, avec

$$A_i = \begin{vmatrix} x_1^{p-i} & x_1^{p-i-1} x_2 & \ldots & x_2^{p-i} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ Y_0^{(n-p+2i-1)} & & \ldots\ldots\ldots & & a_0 & & \ldots\ldots\ldots & & b_0 & & \ldots\ldots\ldots & \\ \vdots & (n+i, p-i+1) & & \vdots & \vdots & (n+i, i) & & \vdots & \vdots & (n+i, n-p+i) & & \vdots \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & a_n & \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots & b_p \end{vmatrix},$$

$$B_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1^{i-1} & x_1^{i-2}x_2 & \cdots & x_2^{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Y_0^{n-p+2i-1} & & \cdots & \vdots & a_0 & & \cdots & \vdots & b_0 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & (n+i, p-i+1) & & \vdots & \vdots & (n+i, i) & & \vdots & \vdots & (n+i, n-p+i) & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & \cdots & & \cdots & a_n & \cdots & & \cdots & b_p \end{vmatrix},$$

$$C_i = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1^{n-p+i-1} & x_1^{n-p+i-2}x_2 & \cdots & x_2^{n-p+i-1} \\ Y_0^{n-p+2i-1} & & \cdots & \vdots & a_0 & & \cdots & \vdots & b_0 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & (n+i, p-i+1) & & \vdots & \vdots & (n+1, i) & & \vdots & \vdots & (n+i, n-p+i) & & \vdots \\ \cdots & & \cdots & Y_{n-p+2i-1}^{(n-p+2i-1)} & \cdots & & \cdots & a_n & \cdots & & \cdots & b_p \end{vmatrix},$$

Ces déterminants A_i, B_i, C_i sont d'ordre $n+i+1$; ils comprennent trois groupes de colonnes, composés respectivement de $p-i+1$, i, et $n-p+i$ colonnes.

Il faut maintenant déterminer les λ_i. D'abord, à cause de $A_0 = \frac{f_0}{\lambda_0}$, on trouve immédiatement

$$\lambda_0 = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p-1}},$$

et, à cause de la valeur donnée plus haut de f_1, on trouve aussi

$$\lambda_1 = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p+1}}.$$

On a encore, en vertu de relations écrites plus haut.

$$f_i(y)\,F_{i+1}(y) + g(y) = 0,$$
$$f_i(y)\,G_{i+1}(y) - f(y) = 0,$$

ou

$$\lambda_i\lambda_{i+1}\,A_i(y)\,C_{i+1}(y) + g(y) = 0,$$
$$\lambda_i\lambda_{i+1}\,A_i(y)\,B_{i+1}(y) - f(y) = 0.$$

Considérons le déterminant d'ordre $n+i$,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} Y_0^{(n-p+2i)} & \cdots & \vdots & a_0 & \cdots & \vdots & b_0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & (n+i, p-i) & \vdots & \vdots & (n+i, i) & \vdots & \vdots & (n+i, n-p+i) & \vdots \\ \cdots & & Y_{n-p+2i}^{(n-p+2i} & \cdots & & a_n & \cdots & & b_p \end{vmatrix};$$

une transformation évidente donne

$$A_i(y) = (-1)^{p-i}\Delta_i.$$

On obtient aussi facilement

$$B_{i+1}(y) = \quad (-1)^p f(y)\Delta_i,$$
$$C_{i+1}(y) = -(-1)^p g(y)\Delta_i,$$

et, par suite, il vient

$$\lambda_i \lambda_{i+1} \Delta_i^2 = (-1)^i.$$

On a d'ailleurs

$$\Delta_0 = [f(y)]^{n-p},$$

et, par suite,

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_0 \Delta_0^2} = \frac{(-1)^p}{[f(y)]^{n-p+1}},$$

comme plus haut.

Il vient ensuite

$$\lambda_2 = -\frac{\lambda_0 \Delta_0^2}{\Delta_1^2}, \qquad \lambda_3 = -\frac{\Delta_1^2}{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2},$$
$$\lambda_4 = +\frac{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2}{\Delta_1^2 \Delta_3^2}, \qquad \lambda_5 = +\frac{\Delta_1^2 \Delta_3^2}{\lambda_0 \Delta_0^2 \Delta_2^2 \Delta_4^2}, \qquad \ldots$$

Toutes les fonctions A_i, B_i, C_i, Δ_i que nous avons introduites sont d'ailleurs des covariants.

3. Avant d'aller plus loin, nous allons démontrer quelques propositions dont nous pourrions nous passer à la rigueur, mais qui ont de l'importance par elles-mêmes.

Considérons une matrice M de pq éléments, à p lignes et q colonnes, avec $p \geqq q$:

$$M = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^q \end{matrix} \right\|.$$

De cette matrice on peut tirer $\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q}$ déterminants d'ordre q; celui de ces déterminants qui est formé par les lignes de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_q$ (les indices étant supposés aller en croissant) sera représenté par $(i_1 i_2 \ldots i_q)$. Plus généralement $(i_1 i_2 \ldots i_r)$ désignera la matrice formée par les lignes de rangs $i_1, i_2, \ldots, i_r$ du tableau M, les indices étant supposés aller en croissant et r pouvant être $\gtrless q$.

Nous dirons que la matrice M est nulle quand tous les déterminants d'ordre le plus élevé q qu'on en peut tirer sont nuls : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, M′ désignant une matrice non nulle formée avec $q-1$ lignes de M, tous les déterminants obtenus en bordant M′ avec l'une quelconque des $p-q+1$ autres lignes de M soient nuls : en tout $p-q+1$ conditions. Si toutes les matrices telles que M′ sont nulles, il en est évidemment de même de M. Plus généralement, si une matrice M″ à $r-1$ lignes $(r < q)$ tirée de M n'est pas nulle, et si toutes les matrices à r lignes obtenues en bordant M″ avec une quelconque des $p-r+1$ autres lignes de M sont nulles, toutes les matrices à r lignes tirées de M sont nulles. Ces propositions sont rendues évidentes par la théorie élémentaire des déterminants et celle des équations linéaires.

Nous appellerons *poids* du déterminant $(i_1 i_2 \ldots i_q)$ la somme $i_1 + i_2 + \ldots + i_q$; ce poids pourra prendre toutes les valeurs entières depuis $\frac{q(q+1)}{2}$ jusqu'à $\frac{q(2p-q+1)}{2}$, en nombre total $q(p-q)+1$. Soient $\delta_{\varpi_1}, \delta_{\varpi_2}, \ldots, \delta_{\varpi_s}$ les s déterminants de même poids ϖ, et $\lambda_{\varpi_1}, \lambda_{\varpi_2}, \ldots, \lambda_{\varpi_s}$ des nombres arbitraires tous différents de zéro : nous allons faire voir que les conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice M soit nulle, *indépendamment de toute hypothèse faite a priori*, sont celles du type suivant, en nombre $q(p-q)+1$:

$$\lambda_{\varpi_1}\delta_{\varpi_1} + \lambda_{\varpi_2}\delta_{\varpi_2} + \ldots + \lambda_{\varpi_s}\delta_{\varpi_s} = 0.$$

Nous allons démontrer ce théorème sur un cas particulier : la marche de la démonstration prouvera immédiatement sa généralité.

Soit $p = 7$, $q = 4$, et faisons les λ égaux à l'unité, ce qui ne modifie en rien la démonstration; les conditions ci-dessus s'écriront

$$
\begin{aligned}
0 &= (1234),\\
0 &= (1235),\\
0 &= (1236) + (1245),\\
0 &= (1237) + (1246) + (1345),\\
0 &= (1247) + (1256) + (1346) + (2345),\\
0 &= (1257) + (1347) + (1356) + (2346),\\
0 &= (1267) + (1357) + (1456) + (2347) + (2356),\\
0 &= (1367) + (1457) + (2357) + (2456),\\
0 &= (1467) + (2367) + (2457) + (3456),\\
0 &= (1567) + (2467) + (3457),\\
0 &= (2567) + (3467),\\
0 &= (3567),\\
0 &= (4567).
\end{aligned}
$$

Nous pouvons supposer $(1) \neq 0$, sans quoi on serait ramené à la même question pour $p = 6$, $q = 4$.

Soit :

1° $(12) \neq 0$: (*a*) $(123) \neq 0$. — Les conditions donnent $(1234) = 0$, $(1235) = 0$, d'où $(12345) = 0$; les conditions donnent alors $(1236) = 0$ et, par suite, $(123456) = 0$; les conditions donnent encore $(1237) = 0$, d'où, enfin, on tire $M = 0$.

(*b*) $(123) = 0$, $(124) \neq 0$. — Les conditions donnent $(1245) = 0$, d'où $(12345) = 0$; les conditions donnent alors $(1246) = 0$, d'où $(123456) = 0$; les conditions donnent encore $(1247) = 0$, d'où enfin $M = 0$.

(*c*) $(123) = (124) = 0$, $(125) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1256) = 0$, d'où $(123456) = 0$; puis $(1257) = 0$, d'où $M = 0$.

(*d*) $(123) = (124) = (125) = 0$, $(126) \neq 0$. — Les matrices à trois

lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1267) = 0$, d'où $M = 0$.

(*e*) $(123) = (124) = (125) = (126) = 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M = 0$.

2° $(12) = 0$, $(13) \neq 0$: (*a*) $(134) \neq 0$. — Les conditions donnent $(1345) = 0$, d'où $(12345) = 0$; puis $(1346) = 0$, d'où $(123456) = 0$; puis $(1347) = 0$, d'où $M = 0$.

(*b*) $(134) = 0$, $(135) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1356) = 0$, d'où $(123456) = 0$; puis $(1357) = 0$, d'où $M = 0$.

(*c*) $(134) = (135) = 0$, $(136) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1367) = 0$, d'où $M = 0$.

(*d*) $(134) = (135) = (136) = 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M = 0$.

3° $(12) = (13) = 0$, $(14) \neq 0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (123) sont nulles.

(*a*) $(145) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes de (1234) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1456) = 0$, d'où $(123456) = 0$; puis $(1457) = 0$, d'où $M = 0$.

(*b*) $(145) = 0$, $(146) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1467) = 0$, d'où $M = 0$.

(*c*) $(145) = (146) = 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M = 0$.

4° $(12) = (13) = (14) = 0$, $(15) \neq 0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (1234) sont nulles.

(*a*) $(156) \neq 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (12345) sont nulles. Les conditions donnent alors $(1567) = 0$, d'où $M = 0$.

(*b*) $(156) = 0$. — Les matrices à trois lignes tirées de (123456) sont nulles, d'où $M = 0$.

5° $(12) = (13) = (14) = (15) = 0$. — Les matrices à deux lignes tirées de (12345) sont nulles, d'où $M = 0$.

Cette démonstration montre clairement que les conditions sont nécessaires et suffisantes, comme nous l'avons annoncé, indépendamment de toute hypothèse. Celles, en effet, qui n'interviennent pas dans la

démonstration interviendraient si l'on supposait successivement

$$(1)=0,\quad 2\neq 0;\qquad (1)=0,\quad (2)=0,\quad (3)\neq 0;\qquad \ldots.$$

4. Considérons la même matrice M et faisons-en un déterminant P d'ordre p, en la bordant de $p-q$ colonnes nouvelles, de façon à obtenir

$$P=\left|\begin{array}{ccccc} Y_0^{(q)}\ldots\ldots\ldots\ldots & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^q \\ \vdots\quad (p, p-q) \quad \vdots & a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^q \\ \vdots\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots\ldots\ldots\ldots\ldots Y_q^{(q)} & a_p^1 & a_p^2 & \ldots & a_p^q \end{array}\right|,$$

les Y gardant toujours la signification indiquée au début.

Développons P par rapport aux déterminants de M; soit

$$(i_1\, i_2 \ldots i_q)=\delta$$

l'un de ces déterminants, avec $i_1<i_2<\ldots<i_q$, et faisons $P=\Sigma D\delta$, de sorte que D est le coefficient de δ dans P.

On voit d'abord immédiatement que, si ϖ est le poids de δ, D est égal à $y_1^{pq-\varpi-\frac{q(q-1)}{2}}\, y_2^{\varpi-\frac{q(q+1)}{2}}\, D_0$, D_0 désignant ce que devient D quand on y fait $y_1=y_2=1$; et ceci montre tout de suite que les déterminants δ de même poids sont multipliés par les mêmes puissances de y_1 et y_2.

Il nous reste à déterminer les coefficients numériques D_0. A cet effet considérons la matrice

$$M_0=\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{q-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & p & p^2 & \ldots & p^{q-1} \end{array}\right\|,$$

et appelons δ_0 ce que devient δ dans cette hypothèse; soit de plus P_0 le déterminant P où l'on a fait $y_1=y_2=1$, et où l'on a remplacé M par M_0, de sorte que

$$P_0=\Sigma D_0\,\delta_0.$$

On sait que, si l'on ajoute les coefficients du développement de $(x-a)^m$ multipliés respectivement par les puissances $p^{\text{ièmes}}$ $(p < m)$ de nombres entiers consécutifs, le résultat est zéro. Si donc on fait le carré de P_0 par colonnes, on voit immédiatement que P_0^2 est égal au produit de deux déterminants qui sont respectivement les carrés de la matrice M_0 et de la matrice complémentaire qui, avec M_0, forme P_0. D'après un théorème connu, on a donc

$$P_0^2 = (\Sigma D_0 \delta_0)^2 = \Sigma D_0^2 \times \Sigma \delta_0^2;$$

de cette identité entre quantités réelles, on conclut que les coefficients D_0 sont proportionnels aux déterminants δ_0. Le facteur de proportionnalité est d'ailleurs facile à calculer : en effet, si

$$\delta_0 = (123\ldots q)_0 = 2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-3)^3(q-2)^2(q-1),$$

on a $D_0 = 1$, et, par suite, si, en général, $\delta_0 = (i_1 i_2 \ldots i_q)_0$, on a

$$D_0 = \frac{\delta_0}{2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-3)^3(q-2)^2(q-1)},$$

avec

$$\delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & i_1 & i_1^2 & \ldots & i_1^{q-1} \\ 1 & i_2 & i_2^2 & \ldots & i_2^{q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots \\ 1 & i^q & i_q^2 & \ldots & i_q^{q-1} \end{vmatrix} = \Pi(i_r - i_s) \qquad \left(\begin{matrix} i_r > i_s, \\ \left.\begin{matrix} r \\ s \end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots, q \end{matrix} \right).$$

Finalement, on obtient donc pour développer P la formule

$$P = \sum y_1^{pq - \varpi - \frac{q(q-1)}{2}} y_2^{\varpi - \frac{q(q+1)}{2}} (i_1 i_2 \ldots i_q) \frac{\Pi(i_r - i_s)}{2^{q-2}3^{q-3}\ldots(q-2)^2(q-1)},$$

avec

$$\varpi = i_1 + i_2 + \ldots + i_q.$$

Ceci nous montre suffisamment que, écrire que la matrice M est nulle, ou bien écrire que le déterminant P, fonction de y_1 et y_2, est identi-

quement nul, sont deux choses équivalentes. C'est surtout de cette propriété que nous allons nous servir maintenant.

5. Revenons aux résultats obtenus au n° 2, et supposons que le déterminant Δ_i soit nul identiquement sans qu'il en soit de même pour aucun des Δ d'indice inférieur à i. Alors, d'après ce qui précède, la matrice

$$\begin{vmatrix} a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vdots \quad (n+i, i) \quad \vdots & \vdots \quad (n+i, n-p+i) \quad \vdots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_n & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_p \end{vmatrix}$$

est nulle, et, par suite, A_i et f_i sont eux-mêmes nuls identiquement. On a donc l'identité

$$G_i g + F_i f = 0,$$

et les deux polynomes g et f ont $p - i + 1$ facteurs linéaires communs, ni plus ni moins. La condition qui exprime ce fait est donc l'évanouissement identique du covariant A_i à deux séries de variables, ou plus simplement du covariant Δ_i à une seule série de variables : ce dernier covariant est d'ailleurs aisé à développer, d'après ce qui a été dit plus haut.

Si l'on a $\Delta_i = 0$, tous les $\Delta_{i+i'}$ $(i' > 0)$ seront nuls ainsi que les $A_{i+i'}$, $B_{i+i'}$, $C_{i+i'}$; il n'y a pas lieu de s'occuper des $f_{i+i'}$, $F_{i+i'}$, $G_{i+i'}$; on a

$$A_i = 0, \qquad B_i = -(-1)^i \frac{f\,\Delta_{i-1}^2}{A_{i-1}}, \qquad C_i = (-1)^i \frac{g\,\Delta_{i-1}^2}{A_{i-1}}.$$

Ces dernières formules se vérifient tout de suite en remarquant que les $p - i + 1$ facteurs linéaires communs à f et g sont donnés par l'équation $f_{i-1} = 0$, ou $A_{i-1} = 0$, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à y_1 et y_2 : donc A_{i-1} est le produit de deux facteurs, l'un fonction des x seuls, l'autre fonction des y seuls, et il en est de même de B_i et C_i.

6. Reprenons l'identité

$$f_i(xy)^{n-p+2i-1} + G_i g + F_i f = 0,$$

et supposons

$$g = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)}),$$

en faisant

$$(x\alpha^{(i)}) = x_1\alpha_2^{(i)} - x_2\alpha_1^{(i)},$$

de sorte que g est ainsi décomposé en ses facteurs linéaires.

En faisant $x_1 = \alpha_1^{(1)}$, $x_2 = \alpha_2^{(1)}$ dans l'identité précédente, il vient

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\alpha^{(1)})(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} + F_i(\alpha^{(1)}) f(\alpha^{(1)}) = 0,$$

et l'on a des formules analogues jusqu'à

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\alpha^{(n)})(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} + F_i(\alpha^{(n)}) f(\alpha^{(n)}) = 0.$$

Supposons alors

$$f_i = \alpha_0 x_1^{p-i} + \ldots,$$
$$F_i = \gamma_0 x_1^{n-p+i-1} + \ldots,$$

et éliminons les coefficients α et γ entre ces diverses relations. Il vient

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
(-1)^{n-p-1} f_i & x_1^{p-i} & \ldots & x_2^{p-i} & 0 & \ldots & 0 \\
F_i & 0 & \ldots & 0 & x_1^{n-p+i-1} & \ldots & x_2^{n-p+i-1} \\
0 & (\alpha_1^{(1)})^{p-i}(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} & \ldots & (\alpha_2^{(1)})^{p-i}(y\alpha^{(1)})^{n-p+2i-1} & (\alpha_1^{(1)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(1)}) & \ldots & (\alpha_2^{(1)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(1)}) \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & (\alpha_1^{(n)})^{p-i}(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} & \ldots & (\alpha_2^{(n)})^{p-i}(y\alpha^{(n)})^{n-p+2i-1} & (\alpha_1^{(n)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(n)}) & \ldots & (\alpha_2^{(n)})^{n-p+i-1} f(\alpha^{(n)})
\end{array}\right| .$$

On en tire

$$\frac{f_i}{a_i} = \frac{F_i}{c_i} = \mu_i,$$

en désignant par μ_i une quantité indépendante des x, et posant

$$a_i = \sum \frac{(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(p-i)})[(y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)})\ldots(y\alpha^{(p-i)})]^{n-p+2i-1} f(\alpha^{(p-i+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(\alpha^{(2)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(p-i)}\alpha^{(n)})},$$

$$c_i = (-1)^{n-i} \sum \frac{(x\alpha^{(p-i+2)})\ldots(x\alpha^{(n)})[(y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)})\ldots(y\alpha^{(p-i+1)})]^{n-p+2i-1} f(\alpha^{(p-i+2)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+2)})\ldots(\alpha^{(p-i+1)}\alpha^{(n)})}.$$

Les sommations sont étendues à tous les termes analogues à ceux qui sont écrits; dans les dénominateurs figurent les produits des déterminants $(\alpha^{(q)}\alpha^{(q')})$, q étant l'un des indices des α qui sont aux numérateurs accompagnés des y, et q' l'un des indices des α qui sont aux numérateurs sous la forme $f(\alpha^{(q')})$.

On a ici, comme plus haut,

$$\mu_i\mu_{i+1}a_i(y)c_{i+1}(y)+g(y)=0;$$

soit alors

$$a_i(y)=\delta_i=\sum\frac{[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(p-i)})]^{n-p+2i}f(\alpha^{(p-i+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p-i+1)})\ldots(\alpha^{(p-i)}\alpha^{(n)})};$$

on a aussi

$$c_{i+1}(y)=(-1)^{n-i-1}\delta_i g(y)$$

et, par suite, il vient

$$\mu_i\mu_{i+1}\delta_i^2=(-1)^{n-i}.$$

Calculons μ_0; on a

$$a_0=\sum\frac{(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(p)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(p)})]^{n-p-1}f(\alpha^{(p+1)})\ldots f(\alpha^{(n)})}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p+1)})\ldots(\alpha^{(p)}\alpha^{(n)})};$$

le développement du déterminant de Vandermonde donne d'ailleurs l'identité

$$(-1)^{(n-1)p}=\sum\frac{(\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_2^{(p)})^{n-p}(\alpha_1^{(p+1)}\ldots\alpha_1^{(n)})^p}{(\alpha^{(1)}\alpha^{(p+1)})\ldots(\alpha^{(p)}\alpha^{(n)})},$$

et, par suite, il vient

$$a_0=(-1)^{(n-1)p}f[f(y)]^{n-p-1};$$

il suffit de comparer les premiers termes de ces covariants pour vérifier leur égalité.

Finalement, on a donc

$$\mu_0=\frac{(-1)^{(n-1)p}}{[f(y)]^{n-p-1}}.$$

Quant à la valeur de δ_0, c'est $(-1)^{(n-1)p}f(y)^{n-p}$, et, par suite, on a

successivement

$$\mu_1 = \frac{(-1)^n}{\mu_0 \delta_0^2} = -\frac{(-1)^{n+p-n-1}}{[f(y)]^{n-p+1}},$$

$$\mu_2 = -\frac{\mu_0 \delta_0^2}{\delta_1^2},$$

$$\mu_3 = -\frac{(-1)^n \delta_1^2}{\mu_0 \delta_0^2 \delta_2^2},$$

$$\mu_4 = \frac{\mu_0 \delta_0^2 \delta_2^2}{\delta_1^2 \delta_3^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

On voit encore que les fonctions a_i, c_i, δ_i ne diffèrent des fonctions A_i, C_i, Δ_i que par le signe, si elles en diffèrent.

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes f et g aient $p - i + 1$ facteurs linéaires communs est l'évanouissement identique du covariant δ_i, ce que montre bien sa forme.

7. Soit de même encore

$$f = (x\beta^{(1)})(x\beta^{(2)})\dots(x\beta^{(p)}).$$

On a des formules telles que

$$(-1)^{n-p-1} f_i(\beta^{(1)})(y\beta^{(1)})^{n-p+2i-1} + G_i(\beta^{(1)}) g(\beta^{(1)}) = 0.$$

et l'on en tire, comme précédemment,

$$\frac{f_i}{a'_i} = \frac{G_i}{b'_i} = \mu'_i,$$

en posant

$$a'_i = \sum \frac{(x\beta^{(1)})\dots(x\beta^{(p-i)})[(y\beta^{(1)})\dots(y\beta^{(p-i)})]^{n-p+2i-1} g(\beta^{(p-i+1)})\dots g(\beta^{(p)})}{(\beta^{(1)}\beta^{(p-i+1)})\dots(\beta^{(p-i)}\beta^{(p)})},$$

$$b'_i = (-1)^{n-i} \sum \frac{(x\beta^{(p-i+2)})\dots(x\beta^{(p)})[(y\beta^{(1)})\dots(y\beta^{(p-i+1)})]^{n-p+2i-1} g(\beta^{(p-i+2)})\dots g(\beta^{(p)})}{(\beta^{(1)}\beta^{(p-i+2)})\dots(\beta^{(p-i+1)}\beta^{(p)})}.$$

On a la relation

$$\mu'_i \mu'_{i+1} a'_i(y) b'_{i+1}(y) - f(y) = 0;$$

en faisant

$$a'_i(y) = \delta'_i = \sum \frac{[(y\beta^{(1)})\ldots(y\beta^{(p-i)})]^{n-p+2i}\, g(\beta^{(p-i+1)})\ldots g(\beta^{(p)})}{(\beta^{(1)}\beta^{(p-i+1)})\ldots(\beta^{(p-i)}\beta^{(p)})},$$

on a aussi

$$b'_{i+1}(y) = (-1)^{n-i-1}\,\delta'_i f(y),$$

et, par suite,

$$\mu'_i\,\mu'_{i+1}\,\delta'^2_i = (-1)^{n-i-1}.$$

On trouve facilement

$$a'_0 = f[f(y)]^{n-p-1}, \qquad \mu'_0 = \frac{1}{[f(y)]^{n-p-1}}, \qquad \delta'_0 = [f(y)]^{n-p}$$

et, par suite,

$$\mu'_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{\mu'_0\,\delta'^2_0} = \frac{(-1)^{n-1}}{[f(y)]^{n-p+1}}, \qquad \mu'_2 = -\frac{\mu'_0\,\delta'^2_0}{\delta'^2_1},$$

$$\mu'_3 = -\frac{(-1)^{n-1}\,\delta'^2_1}{\mu'_0\,\delta'^2_0\,\delta'^2_2}, \qquad \mu'_4 = \frac{\mu'_0\,\delta'^2_0\,\delta'^2_2}{\delta'^2_1\,\delta'^2_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les fonctions a'_i, b'_i, δ'_i ne diffèrent que par le signe, si elles en diffèrent, des fonctions A_i, B_i, Δ_i.

8. Supposons que l'on prenne pour forme f,

$$f = y_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial g}{\partial x_2},$$

de sorte que l'on a $p = n - 1$, et aussi

$$\begin{aligned} b_0 &= n a_0 y_1 + a_1 y_2, \\ b_1 &= (n-1) a_1 y_1 + 2 a_2 y_2, \\ b_2 &= (n-2) a_2 y_1 + 3 a_3 y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En outre, si l'on fait

$$g = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)}),$$

on a

$$f = \Sigma(y\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)}).$$

On a ici

$$a_i = (-1)^{(n-1)(i+1)+\frac{i(i+1)}{2}} g(y)\,\Sigma(x\alpha^{(1)})\ldots(x\alpha^{(n-i-1)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1}$$
$$\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

$$c_i = (-1)^{(n-i)(i+1)+\frac{i(i-1)}{2}} g(y)\,\Sigma(x\alpha^{(n-i+1)})\ldots(x\alpha^{(n)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1}$$
$$\times(\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

$$\delta_i = (-1)^{n-1)(i+1)+\frac{i(i+1)}{2}} g(y)\,\Sigma[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i}$$
$$\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2.$$

En outre

$$f(y) = n\,g(y),$$

et l'on a

$$\mu_0 = (-1)^{n-1}, \qquad \mu_1 = -\frac{1}{g^2(y)\,\sigma_0^2},$$

$$\mu_2 = -\frac{(-1)^{n-1}\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \qquad \mu_3 = \frac{\sigma_1^2}{g^2(y)\,\sigma_0^2\,\sigma_2^2}, \qquad \ldots,$$

si l'on fait

$$\sigma_i = \Sigma[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i}\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

de sorte que, en particulier

$$\sigma_0 = n.$$

Si l'on fait encore

$$\varrho_i = \Sigma(x\alpha^{(1)})\ldots(x\alpha^{(n-i-1)})[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1}$$
$$\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

de sorte que

$$\varrho_i(y) = \sigma_i,$$

et en particulier

$$\varrho_0 = \frac{f}{g(y)},$$

on aura donc

$$f_0 = g(y)\,\varphi_0,$$

$$f_1 = \frac{1}{g(y)\,\sigma_0^2}\,\varphi_1,$$

$$f_2 = \frac{g(y)\,\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\,\varphi_2,$$

$$f_3 = \frac{\sigma_1^2}{g(y)\,\sigma_0^2\,\sigma_2^2}\,\varphi_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De même, si l'on fait

$$\psi_i = \Sigma(x\alpha^{(n-i+1)})\dots(x\alpha^{(n)})[(y\alpha^{(1)})\dots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1}$$
$$\times(\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\dots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2,$$

de sorte que

$$\psi_{i+1}(y) = g(y)\,\sigma_i,$$

et en particulier

$$\psi_0 = \frac{1}{g(y)},$$

on aura

$$F_0 = -\,g(y)\,\psi_0 = -\,1,$$

$$F_1 = -\,\frac{1}{g(y)\,\sigma_0^2}\,\psi_1,$$

$$F_2 = -\,\frac{g(y)\,\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\,\psi_2,$$

$$F_3 = -\,\frac{\sigma_1^2}{g(y)\,\sigma_0^2\,\sigma_2^2}\,\psi_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

De même enfin, si l'on fait

$$G_1 = \frac{1}{g(y)\,\sigma_0^2}\,\chi_1 = 1,$$

$$G_2 = \frac{g(y)\,\sigma_0^2}{\sigma_1^2}\,\chi_2,$$

$$G_3 = \frac{\sigma_1^2}{g(y)\,\sigma_0^2\,\sigma_2^2}\,\chi_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

de sorte que

$$\chi_i = \frac{f\psi_i - \varphi_i(xy)^{2i}}{g},$$

et, par suite,

$$\chi_{i+1}(y) = n\,g(y)\,\sigma_i,$$

et, en particulier,

$$\chi_1 = n^2 g(y),$$

on trouvera en déterminant χ_i par cette relation même et faisant les réductions nécessaires

$$\begin{aligned}
\chi_i = \Sigma\{&[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i)})]^{2i-1}(\alpha^{(n-i+1)}\alpha^{(n-i+2)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2 \\
&\qquad\times\Sigma(y\alpha^{(n-i+1)})(x\alpha^{(n-i+2)})\ldots(x\alpha^{(n)})\} \\
+\,2\Sigma\{&[(y\alpha^{(1)})\ldots(y\alpha^{(n-i-1)})]^{2i-1} \\
&\times\Sigma(x\alpha^{(n-i)})(x\alpha^{(n-i+1)})\ldots(x\alpha^{(n-2)})(y\alpha^{(n-1)})^i(y\alpha^{(n)})^i \\
&\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-3)}\alpha^{(n-2)})^2 \\
&\quad\times(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-1)})(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n)})\ldots(\alpha^{(n-2)}\alpha^{(n-1)})(\alpha^{(n-2)}\alpha^{(n)})\}.
\end{aligned}$$

L'évanouissement identique du covariant σ_i est la condition nécessaire et suffisante pour que le polynome g ait $n-i$ facteurs linéaires communs avec sa forme polaire f.

9. On peut chercher encore à exprimer les diverses fonctions que nous venons de considérer sous forme de déterminants. En se reportant au n° 2 et faisant quelques transformations faciles à retrouver, on obtient les formules suivantes

$$\sigma_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} \times \begin{vmatrix} Y_n^{(2i)} & na_0 & a_1 \\ (n-1)a_1 & & 2a_2 \\ (n+i-1, n-i-1) & (n+i-1, i) & (n+i-1, i) \\ Y_{2i}^{(2i)} & a_{n-1} & na_n \end{vmatrix}$$

$$\varphi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-1}} \times \begin{vmatrix} x_1^{n-i-1} & \cdots & x_2^{n-i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ Y_0^{(2i-1)} & \cdots & & na_0 & \cdots & & a_1 & \cdots & \\ \vdots & (n+i-1, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots \\ \cdots & & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \cdots & & a_{n-1} & \cdots & & na_n \end{vmatrix},$$

$$\psi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-1}} \times \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1^{i-1}x_2 & x_1^{i-2}x_2^2 & \cdots & x_2^i & -x_1^i & -x_1^{i-1}x_2 & \cdots & -x_1x_2^{i-1} \\ Y_0^{(2i-1)} & \cdots & & na_0 & \cdots & & & a_1 & \cdots & & \\ \vdots & (n+i-1, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots & & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots & \\ \cdots & & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \cdots & & a_{n-1} & & \cdots & & & na_n \end{vmatrix},$$

$$\chi_i = \frac{(-1)^{n-1+\frac{i(i-1)}{2}}}{n^{i-2}} \times \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_1^{i-1}y_2 & x_1^{i-2}x_2y_2 & \cdots & x_2^{i-1}y_2 & -x_1^{i-1}y_1 & -x_1^{i-2}x_2y_1 & \cdots & -x_2^{i-2}y_1 \\ Y_0^{(2i-1)} & \cdots & & na_0 & \cdots & & & a_1 & \cdots & & \\ \vdots & (n+i-1, n-i) & \vdots & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots & & \vdots & (n+i-1, i) & \vdots & \\ \cdots & & Y_{2i-1}^{(2i-1)} & \cdots & & a_{n-1} & & \cdots & & & na_n \end{vmatrix}.$$

Ces trois dernières formes sont d'ailleurs illusoires pour $i = 0$.

10. Les fonctions f_i dont nous venons de donner l'expression sous forme de déterminant, ou sous forme de fonction symétrique des racines de g, sont les fonctions de Sturm telles qu'on doit les concevoir dans la théorie des formes. Elles jouissent des propriétés de ces fonctions; cependant remarquons que l'on a

$$\frac{f_0}{g} = \sum \frac{(y\alpha^{(1)})}{(x\alpha^{(1)})}.$$

Ce rapport change donc de signe lorsque (la forme g étant supposée

à coefficients réels) $\frac{x_1}{x_2}$ devient égal à une racine réelle $\frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$ de g, les valeurs données à y_1 et y_2 étant fixes, d'ailleurs quelconques : mais la variation qui en résulte peut être perdue ou gagnée.

Pour fixer les idées, supposons que l'on prenne toujours x_2, y_2, $\alpha_2^{(k)}$ positifs : la variation est perdue si l'on a $\frac{y_1}{y_2} > \frac{\alpha_1^{(k)}}{\alpha_2^{(k)}}$, gagnée dans le cas contraire.

On peut donc énoncer la règle suivante : Soit à chercher le nombre N des racines réelles de g comprises entre deux nombres a et b, tels que l'on ait $a < b$; donnons à y_1 et y_2 des valeurs fixes quelconques, et soit y_2 positif : 1° si $\frac{y_1}{y_2} > b$, N est égal au nombre des variations perdues par la suite des fonctions $g, f_0, f_1, f_2, \ldots$, quand on y remplace successivement $\frac{x_1}{x_2}$ par a et b $(x_2 > 0)$; 2° si $\frac{y_1}{y_2} < a$, N est égal au nombre des variations gagnées dans les mêmes circonstances; 3° si $a < \frac{y_1}{y_2} < b$, désignons par c_1, c_2, c les nombres des variations de la suite lorsqu'on y fait respectivement $\frac{x_1}{x_2} = a$, $\frac{x_1}{x_2} = b$, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$: on a alors

$$N = c_1 + c_2 - 2c.$$

On remarquera d'ailleurs que la suite des fonctions $g, f_0, f_1, f_2, \ldots$ peut être remplacée dans ces opérations par la suite $\frac{g}{g(y)}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, et en particulier, quand on fera $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$, par la suite $1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$: ceci résulte des formules données plus haut.

Si, en particulier, on veut avoir le nombre total N des racines réelles de g, on fera $a = -\infty$, $b = +\infty$; alors $c_1 + c_2 = n$, nécessairement, et $N = n - 2c$; ainsi, comme on le sait, chaque variation dans la suite $1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$, ou plus simplement à cause de $\sigma_0 = n$, dans la suite $n, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, indique la présence d'un couple de racines imaginaires, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à y_1 et y_2.

On obtiendra les fonctions de Sturm ordinaires en faisant $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, et le nombre des couples de racines imaginaires sera celui des

variations de la suite $n, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$, où l'on a

$$s_i = \Sigma(\alpha_2^{(1)}\alpha_2^{(2)}\ldots\alpha_2^{(n-i-1)})^{2i}(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha^{(n-1)}\alpha^{(n)})^2$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} \begin{vmatrix} na_0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ (n-1)a_1 & na_0 & \ddots & \vdots & 2a_2 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-2i+1)a_{2i-1} & (n-2i+2)a_{2i-2} & \cdots & (n-i)a_i & 2ia_{2i} & (2i-1)a_{2i-1} & \cdots & (i+1)a_{i+1} \end{vmatrix},$$

le déterminant étant d'ordre $2i$.

Faisons encore

$$x_1 = x, \qquad x_2 = 1,$$

et

$$R_i = \Sigma(\alpha_2^{(1)}\ldots\alpha_2^{(n-i-1)})^{2i-1}(\alpha^{(n-i)}\alpha^{(n-i+1)})^2\ldots(\alpha_{n-1}\alpha_n)^2(x\alpha_2^{(1)} - \alpha_1^{(1)})\ldots(x\alpha_2^{(n-i-1)} - \alpha_1^{(n-i-1)})$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{i+1}{2}}}{n^{i-1}} \begin{vmatrix} x^{n-i-1} & x^{n-i-2} & \cdots & x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & na_0 & \cdots & \vdots & a_1 & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \vdots & (n+i-1,\ i) & \vdots & \vdots & (n+i-1,\ i) & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & \cdots & \cdots & na_n \end{vmatrix};$$

les véritables fonctions de Sturm seront alors

$$S_{-1} = g,$$

$$S_0 = \frac{dg}{dx},$$

$$S_1 = \frac{1}{n^2 a_0} R_1,$$

$$S_2 = \frac{n^2 a_0}{s_1^2} R_2,$$

$$S_3 = \frac{s_1^2}{n^2 a_0 s_2^2} R_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on pose

$$s_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} d_i, \qquad R_i = \frac{(-1)^{\frac{i(i+1)}{2}}}{n^{i-1}} D_i,$$

on a d'une façon générale

$$S_{2i+1} = (-1)^{i+1} \frac{D_{2i+1}}{n^2 a_0} \frac{d_1^2 d_3^2 \ldots d_{2i-1}^2}{d_2^2 d_4^2 \ldots d_{2i}^2},$$

$$S_{2i} = (-1)^i n a_0 D_{2i} \frac{d_2^2 d_4^2 \ldots d_{2i-2}^2}{d_1^2 d_3^2 \ldots d_{2i-1}^2}.$$

Les D_i et d_i sont les déterminants qui figurent dans R_i et s_i: leur composition est facile à retenir.

Les résultats précédents sont connus : je les ai rappelés ici pour réunir ensemble les principales formules relatives à cette théorie.

11. A propos des fonctions de Sturm, j'indiquerai encore ici un procédé qui permet de les calculer assez rapidement quand on est en présence d'équations numériques.

Soient deux polynomes des degrés n et $n-1$, dont les coefficients successifs sont pour le premier a_0, a_1, a_2, ... et pour le second b_0, b_1, b_2, ... Faisons

$$\alpha_i = \frac{a_i}{a_0}, \qquad \beta_i = \frac{b_i}{b_0},$$

et soit

$$c_0 = \beta_1 - \alpha_1, \qquad c_1 = \beta_2 - \alpha_2, \qquad c_2 = \beta_3 - \alpha_3, \qquad \ldots;$$

faisons encore

$$\gamma_i = \frac{c_i}{c_0},$$

et soit

$$d_0 = \gamma_1 - \beta_1, \qquad d_1 = \gamma_2 - \beta_2, \qquad d_2 = \gamma_3 - \beta_3, \qquad \ldots;$$

le reste changé de signe de la division des deux polynomes est, à un facteur près qui a le signe de $a_0 c_0$, le polynome qui a pour coefficients successifs d_0, d_1, d_2, ...

Les calculs se font aisément par logarithmes, et l'application répétée de cette règle fournit les fonctions successives de Sturm à des facteurs positifs près, ce qui est sans importance.

12. Cherchons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour que le polynome homogène g ait q facteurs linéaires d'ordre p

de multiplicité. Connaissant cette condition, on saura exprimer que g a ses facteurs linéaires groupés en facteurs égaux de telle façon qu'on voudra.

Considérons les deux formes covariantes de g, où y_1 et y_2, z_1 et z_2 désignent deux nouveaux couples de variables

$$\frac{1}{(p-1)!}\left(y_1^{p-1}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-2}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}+\cdots\right),\qquad \frac{1}{(p-1)!}\left(z_1^{p-1}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+C_{p-1}^{(1)}z_1^{p-2}z_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}+\cdots\right),$$

$C_m^{(p)}$ étant le nombre des combinaisons de m lettres p à p.

Égalons à zéro le covariant qui exprime par son évanouissement que ces deux formes ont, quelles que soient les variables y et z, q facteurs linéaires communs : on aura ainsi la condition cherchée.

On peut simplifier cette condition en faisant, après division par une puissance convenable de (yz), $z_1=y_1$, $z_2=y_2$; et l'on obtient un nouveau covariant égalé à zéro, et qui n'est autre que le déterminant qui exprime par son évanouissement que les deux formes

$$\frac{1}{(p-1)!}\left[(p-1)y_1^{p-2}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-1}}+(p-2)C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-3}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{(p-1)!}\left[1.C_{p-1}^{(1)}y_1^{p-2}\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}+2C_{p-2}^{(2)}y_1^{p-3}y_2\frac{\partial^{p-1}g}{\partial x_1^{p-2}\partial x_2}+\cdots\right]$$

ont q facteurs linéaires communs.

Après des modifications immédiates dans l'écriture des coefficients, on obtient, en faisant $i=n+2-p-q$,

$$0=\begin{vmatrix} Y_0^{(2i)}\cdots\cdots & a_0y_1^{p-2}+\frac{a_1}{C_n^{(1)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots & \cdots\cdots & \frac{a_1}{C_n^{(1)}}y_1^{p-2}+\frac{a_2}{C_n^{(2)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots & \cdots\cdots \\ \vdots & C_{n-p+1}^{(1)}\left(\frac{a_1}{C_n^{(1)}}y_1^{p-2}+\frac{a_2}{C_n^{(2)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots\right) & & C_{n-p+1}^{(1)}\left(\frac{a_2}{C_n^{(2)}}y_1^{p-2}+\frac{a_3}{C_n^{(3)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots\right) & \\ (2i+q-1,q-1) & C_{n-p+1}^{(2)}\left(\frac{a_2}{C_n^{(2)}}y_1^{p-2}+\frac{a_3}{C_n^{(3)}}C_{p-2}^{(1)}y_1^{p-3}y_2+\cdots\right) & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & (2i+q-1,i) & \vdots & (2i+q-1,i) \\ \cdots\cdots Y_{2i}^{(2i)} & \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{a_{n-p+1}}{C_n^{(n-p+1)}}y_1^{p-2}+\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{a_{n-p+2}}{C_n^{(n-p+2)}}y_2^{p-2}+\cdots & \end{vmatrix}.$$

On peut remplacer cette condition par la suivante, qui est l'évanouissement d'un déterminant d'ordre $pi+q-1$, dans

lequel on a

$$\alpha_k = \frac{(p-k-1)(p-k)}{2}, \qquad \beta_k = -k(p-k-1), \qquad \gamma_k = \frac{k(k+1)}{2},$$

et où les notations

$$\begin{array}{|lcr|}\alpha & \cdots & \\ & (\lambda, \lambda) & \\ & \cdots & \alpha\end{array}\,, \qquad \begin{array}{|lcr|}0 & \cdots & \\ & (\lambda, \mu) & \\ & \cdots & 0\end{array}$$

désignent, la première un tableau carré de λ lignes et λ colonnes dans lequel tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale qui sont tous égaux à α, et la seconde un tableau rectangulaire de λ lignes et μ colonnes, dans lequel tous les éléments sont nuls :

$$0 = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
\begin{array}{lr} Y_0^{(2i)} \cdots & \\ (2i+q-1, q-1) & \\ \cdots & Y_{2i}^{(2i)}\end{array} &
\begin{array}{lr} a_0 \cdots & \\ C_{n-p+1}^{(1)} \frac{a_1}{C_n^{(1)}} & \\ (2i+q-1, i) & \\ \cdots & \frac{a_{n-p+1}}{C_n^{(n-p+1)}}\end{array} &
\begin{array}{lr} \frac{a_1}{C_n^{(1)}} \cdots & \\ C_{n-p+1}^{(1)} \frac{a_2}{C_n^{(2)}} & \\ (2i+q-1, i) & \\ \cdots & \frac{a_{n-p+2}}{C_n^{(n-p+2)}}\end{array} &
\cdots & & &
\begin{array}{lr} \frac{a_{p-1}}{C_n^{(p-1)}} \cdots & \\ C_{n-p+1}^{(1)} \frac{a_p}{C_n^{(p)}} & \\ (2i+q-1, i) & \\ \cdots & a_n\end{array} \\
\hline
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ & \\ [(p-2)i, q-1] & \\ & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} \alpha_1 y_2^2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \alpha_1 y_2^2\end{array} &
\begin{array}{lr} \beta_1 y_1 y_2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \beta_1 y_1 y_2\end{array} &
\begin{array}{lr} \gamma_1 y_1^2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \gamma_1 y_1^2\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} \; \cdots &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} \\
 &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} \alpha_2 y_2^2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \alpha_2 y_2^2\end{array} &
\begin{array}{lr} \beta_2 y_1 y_2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \beta_2 y_1 y_2\end{array} &
\begin{array}{lr} \gamma_2 y_1^2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \gamma_2 y_1^2\end{array} \; \cdots &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} &
\begin{array}{lr} 0 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & 0\end{array} \; \cdots &
\begin{array}{lr} \beta_{p-2} y_1 y_2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \beta_{p-2} y_1 y_2\end{array} &
\begin{array}{lr} \gamma_{p-2} y_1^2 \cdots & \\ (i, i) & \\ \cdots & \gamma_{p-2} y_1^2\end{array}
\end{array}\right|.$$

En effet, si l'on multiplie ce déterminant par celui-ci

$$\begin{vmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(q-1, q-1) & (q-1, pi) & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & y_1^{p-2} & C_{p-2}^{(1)} y_1^{p-3} y_2 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(pi, q-1) & (i, i) & (i, i) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & y_1^{p-2} & C_{p-2}^{(1)} y_1^{p-3} y_2 & \cdots \\
0 & y_1^{p-2} & y_2^{p-2} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
(i, i) & (i, i) & (i, i) & (i, i) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & y_1^{p-2} & C_{p-2}^{(1)} y_1^{p-3} y_2 & 0 \\
0 & y_1^{p-2} & C_{p-2}^{(1)} y_1 y_2^{p-1} & y_2^{p-2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[(p-2)i, i)] & [(p-2)i, i)] & [(p-2)i, (p-2)i] & (i, i) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & C_{p-2}^{(1)} y_1 y_2^{p-1} & y_2^{p-2} \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}$$

qui est égal à $y_1^{2i(p-2)}$, on reproduit le déterminant proposé multiplié par le même facteur.

Pour plus de clarté, appliquons ce résultat aux questions suivantes :

1° Condition pour que la forme quintique

$$u = a_0 x_1^5 + 5a_1 x_1^4 x_2 + 10a_2 x_1^3 x_2^2 + 10a_3 x_1^2 x_2^3 + 5a_4 x_1 x_2^4 + a_5 x_2^5$$

ait un facteur triple.

On obtient

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 3a_1 & a_0 & 0 & 3a_2 & a_1 & 0 & 3a_3 & a_2 & 0 \\ 3a_2 & 3a_1 & a_0 & 3a_3 & 3a_2 & a_1 & 3a_4 & 3a_3 & a_2 \\ a_3 & 3a_2 & 3a_1 & a_4 & 3a_3 & 3a_2 & a_5 & 3a_4 & 3a_3 \\ 0 & a_3 & 3a_2 & 0 & a_4 & 3a_3 & 0 & a_5 & 3a_4 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 \\ x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 & 0 & 0 & -x_1x_2 & 0 & 0 & x_1^2 \end{vmatrix},$$

ce qui, en conservant les notations de l'Algèbre supérieure de Salmon, donne

$$S^3 - 27T^2 = 0.$$

En même temps que cette condition, la suivante, qui exprime que u a deux facteurs communs avec sa forme polaire, sera vérifiée :

$$0 = \begin{vmatrix} x_2^6 & a_0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ -6x_2^5x_1 & 4a_1 & a_0 & 0 & 4a_2 & a_1 & 0 \\ 15x_2^4x_1^2 & 6a_2 & 4a_1 & a_0 & 6a_3 & 4a_2 & a_1 \\ -20x_2^3x_1^3 & 4a_3 & 6a_2 & 4a_1 & 4a_4 & 6a_3 & 4a_2 \\ 15x_2^2x_1^4 & a_4 & 4a_3 & 6a_2 & a_5 & 4a_4 & 6a_3 \\ -6x_2x_1^5 & 0 & a_4 & 4a_3 & 0 & a_5 & 4a_4 \\ x_1^6 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 \end{vmatrix}.$$

2° Condition pour que la même forme quintique ait un facteur quadruple.

On obtient

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ 2a_1 & a_0 & 2a_2 & a_1 & 2a_3 & a_2 & 2a_4 & a_3 \\ a_2 & 2a_1 & a_3 & 2a_2 & a_4 & 2a_3 & a_5 & 2a_4 \\ 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & a_5 \\ 3x_2^2 & 0 & -2x_1x_2 & 0 & x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3x_2^2 & 0 & -2x_1x_2 & 0 & x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 & 0 & -2x_1x_2 & 0 & 3x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_2^2 & 0 & -2x_1x_2 & 0 & 3x_1^2 \end{vmatrix},$$

ou, d'après les notations de Salmon, $\mathrm{HS} - u\mathrm{T} = 0$.

En même temps, les conditions qui expriment que u a trois facteurs communs avec sa forme polaire, ou deux facteurs communs avec sa forme polaire du second ordre seront vérifiées, et l'on a ainsi :

$$0 = \begin{vmatrix} x_2^4 & 0 & a_0 & 0 & a_1 & 0 \\ -4x_2^3x_1 & x_2^4 & 4a_1 & a_0 & 4a_2 & a_1 \\ 6x_2^2x_1^2 & -4x_2^3x_1 & 6a_2 & 4a_1 & 6a_3 & 4a_2 \\ -4x_2x_1^3 & 6x_2^2x_1^2 & 4a_3 & 6a_2 & 4a_4 & 6a_3 \\ x_1^4 & -4x_2x_1^3 & a_4 & 4a_3 & a_5 & 4a_4 \\ 0 & x_1^4 & 0 & a_4 & 0 & a_5 \end{vmatrix}$$

ou $5\mathrm{HS} - 9u\mathrm{T} = 0$, avec

$$0 = \begin{vmatrix} x_2^4 & a_0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ -4x_2^3x_1 & 3a_1 & a_0 & 3a_2 & a_1 & 3a_3 & a_2 \\ 6x_2^2x_1^2 & 3a_2 & 3a_1 & 3a_3 & 3a_2 & 3a_4 & 3a_3 \\ -4x_2x_1^3 & a_3 & 3a_2 & a_4 & 3a_3 & a_5 & 3a_4 \\ x_1^4 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & a_5 \\ 0 & x_2^2 & 0 & -x_1x_2 & 0 & x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^2 & 0 & -x_1x_2 & 0 & x_1^2 \end{vmatrix}$$

ou $2\mathrm{HS} - 3u\mathrm{T} = 0$.

Ceci nous montre que l'on a $HS = 0$ et $uT = 0$, et, par suite, que S et T doivent être nuls. On sait qu'il suffit que S soit nul, et l'on voit par cet exemple que l'on aura souvent des conditions superflues.

Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants;

PAR M. P. DUHEM.

INTRODUCTION, HISTORIQUE.

On sait que l'équilibre d'un corps flottant sur un liquide pesant est assuré lorsque le flotteur déplace un volume liquide aussi pesant que lui et que les deux centres de gravité du flotteur et du liquide déplacé sont sur une même verticale (*axe primitif*). Mais cet équilibre est-il stable?

Bouguer est le premier géomètre qui ait cherché à approfondir cette question. Il se borna à examiner le cas où le flotteur est symétrique par rapport à un plan qui demeure vertical pendant le mouvement; il supposa que le volume du liquide déplacé restait constant et démontra que la stabilité dépendait de la position d'un point particulier qu'il nomma *métacentre*. Ce point est l'intersection de l'axe primitif avec la direction de la résultante de la poussée du fluide après un déplacement infiniment petit. Si ce point est au-dessus du centre de gravité du corps, les forces tendront à ramener le corps à sa première position; elles tendront à l'en éloigner dans le cas contraire. L'équilibre est donc stable ou instable suivant que le métacentre est au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps flottant. Telle est la condition de stabilité donnée par Bouguer et qui a été longtemps admise sans contestation.

Le raisonnement de Bouguer manquait entièrement de généralité;

non seulement il supposait que le plan de symétrie du corps demeurait vertical durant les oscillations effectuées par ce corps, mais, en outre, il supposait que le volume immergé demeurait invariable.

Duhamel ([1]) appela le premier l'attention sur le caractère arbitraire d'une pareille restriction.

« La supposition, dit-il, de la constance du volume déplacé, a dû paraître bientôt trop restreinte; car, comment admettre que la cause qui produit le dérangement ne puisse changer que l'inclinaison? On a reconnu d'ailleurs que, lors même que cette circonstance aurait lieu au commencement, elle ne subsisterait pas pendant toute la durée du mouvement, excepté dans le cas très particulier où le centre de gravité de la section à fleur d'eau serait situé sur l'axe primitif.

» On ne pouvait donc plus, en restant dans la généralité de la question, se dispenser d'avoir égard à la fois à la variation du volume et à celle de l'inclinaison; et c'est ce que l'on a fait. Mais ce que l'on n'a pas vu, c'est qu'alors le métacentre devenait un point complètement indéterminé, qui dépendait du rapport des deux variations et qui pouvait occuper toutes les positions de l'axe primitif.

» Le raisonnement de Bouguer, que l'on a reproduit, prouverait donc à volonté la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre du même corps, suivant la nature du dérangement primitif, en exceptant toutefois le cas particulier où l'axe primitif contiendrait le centre de gravité de la section à fleur d'eau. Cette conséquence absurde du genre de raisonnement suivi depuis Bouguer en rend l'insuffisance évidente et oblige de recourir aux équations du mouvement, même dans le cas d'un corps symétrique par rapport à un plan vertical. »

Duhamel se propose de former ces équations, en considérant toujours le cas d'un corps flottant symétrique dont le plan de symétrie demeure vertical; il suppose également que la surface du liquide demeure horizontale. Pour étudier le mouvement du flotteur, on peut faire abstraction de la présence du liquide, à condition d'appliquer au corps solide des forces de liaison convenablement choisies qui sont les

---

([1]) Duhamel, *Note sur divers principes de Mécanique : Observations sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe Cahier, t. XV, p. 12; 1835.)

pressions du liquide sur le solide. *Duhamel admet que ces pressions peuvent être déterminées d'après les règles de l'Hydrostatique,* telles qu'elles ont été établies par Archimède. Il forme alors les équations différentielles du mouvement du corps et, cherchant la condition pour que ce mouvement demeure toujours très petit, il retrouve ainsi la condition donnée par Bouguer, à savoir que le métacentre doit se trouver au-dessus du centre de gravité du corps. « En résumé, conclut-il, la théorie que l'on a donnée jusqu'ici de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, par la considération du métacentre, renferme des inexactitudes qui ne permettent plus de la conserver. Néanmoins, la condition à laquelle elle conduit est conforme à celle qu'une analyse exacte aurait fait connaître, et c'est précisément pour cela que l'erreur est restée si longtemps inaperçue. »

Plus tard, Poisson [1] et Duhamel [2] cherchèrent, par une méthode analogue, la condition de stabilité d'un flotteur de forme quelconque; en admettant encore que les pressions du liquide sur le solide pouvaient être déterminées par les règles de l'Hydrostatique, et en faisant usage du principe des forces vives, ils parvinrent au théorème suivant :

L'équilibre peut être encore stable lorsque le centre de gravité du corps est au-dessus de celui du fluide déplacé; il suffit que la distance de ces deux points soit moindre que le plus petit des moments d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport aux droites menées par son centre de gravité, divisé par le volume immergé.

Cette règle peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Donnons au flotteur toutes les positions pour lesquelles le poids du liquide déplacé est précisément égal au poids du corps flottant; marquons, dans le corps, le centre de poussée correspondant à chacune de ces positions; ces centres de poussée dessinent une surface, considérée par Dupin, et nommée *surface des centres de carène;* on sait que la verticale passant par le centre de gravité d'un flotteur en équilibre est normale à la surface des centres de carène.

---

(1) Poisson, *Traité de Mécanique*, t. II, p. 579 (2e édition).

(2) Duhamel, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 252.

Sur cette normale se trouvent deux centres de courbure principaux de la surface des centres de carène; ces deux points se nomment les deux *métacentres* du flotteur; le *petit métacentre* est celui qui se trouve le plus bas.

Ces définitions posées, la condition de stabilité donnée par Poisson et Duhamel peut s'énoncer ainsi : *Le centre de gravité du flotteur doit être au-dessous du petit métacentre.*

Cette règle avait été également donnée par Bravais ([1]); mais Bravais s'était borné à examiner le cas où le flotteur possède deux plans de symétrie rectangulaires et où les déplacements imposés au flotteur n'altèrent pas le volume immergé. Après avoir énoncé la règle précédente, Bravais ajoute : « Ce serait une erreur de croire que, conformément à un principe bien connu de Mécanique, le centre de gravité du flotteur est le plus bas possible dans la position d'équilibre stable; ce serait mal entendre le principe de Mécanique auquel nous faisons allusion; mais le centre de gravité du système formé par le flotteur et le liquide environnant doit être et est, en effet, le plus bas possible dans l'équilibre stable, comme il nous sera actuellement facile de le démontrer. » Bravais démontre cette proposition en supposant le niveau du liquide maintenu horizontal et le volume immergé maintenu invariable.

Poisson et Duhamel avaient écrit et intégré les équations des oscillations infiniment petites d'un corps flottant dans le cas où le flotteur admet un plan de symétrie qui demeure vertical pendant le mouvement et où toutes les vitesses initiales sont nulles. M. C. Jordan ([2]) se proposa de traiter dans toute sa généralité le problème des petits mouvements d'un flotteur. Pour mettre ce problème en équation, M. C. Jordan reprit l'hypothèse fondamentale déjà admise par Poisson et par Duhamel, à savoir que l'on pouvait faire abstraction de l'existence du liquide à la condition d'appliquer à la surface du corps des

---

([1]) Auguste Bravais, *Sur l'équilibre des corps flottants*, Thèse de Mécanique soutenue devant la Faculté des Sciences de Lyon le 5 octobre 1837. Paris, 1840.

([2]) C. Jordan, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, série II, tome I, p. 170; 1867.)

pressions *données à chaque instant par les principes de l'Hydrostatique;* voici comment M. C. Jordan énonce ces hypothèses :

« Nous supposerons que la surface du liquide est assez étendue pour que son niveau ne soit pas altéré par les oscillations du flotteur; qu'elle reste plane pendant toute la durée du mouvement; enfin, que la poussée du liquide sur le flotteur à un instant quelconque est précisément la même que si tout le système était maintenu au repos. »

M. C. Jordan ajoute : « Ces hypothèses ne sont pas parfaitement exactes; on conçoit, en effet, qu'il est impossible que le flotteur, en oscillant, ne communique pas quelque mouvement au liquide qui l'entoure et que, d'autre part, l'état de ce mouvement devra modifier les réactions qui se produisent; mais ces causes perturbatrices, qui ne paraissent pas susceptibles d'être soumises à un calcul précis, diminuent évidemment en même temps que l'amplitude et la vitesse des oscillations; et dans le cas limite où le déplacement et la vitesse initiale sont infiniment petits tous les deux, elles deviennent négligeables. »

Les suppositions fondamentales sur lesquelles repose l'analyse de M. C. Jordan sont les mêmes que celles de Duhamel et de Poisson; on ne doit donc pas s'étonner qu'il retrouve la condition de stabilité indiquée par ces géomètres.

Ces suppositions fondamentales avaient été très vivement critiquées par Clebsch [1]; parlant des recherches de Poisson et de Duhamel sur les petites oscillations des corps flottants, il ajoute : « Les équations qu'ils ont données reposent sur l'hypothèse que, pendant les mouvements infiniment petits du corps, on peut remplacer la pression hydrodynamique par la pression hydrostatique. Or, les deux pressions diffèrent entre elles de termes qui sont du même ordre que les vitesses que l'on a à considérer. Par conséquent, on voit qu'il n'est pas permis de négliger cette différence. En effet, les pressions hydrostatiques s'annulent les unes les autres à un infiniment petit près, puisque le corps qui éprouve des mouvements est dans une position infiniment voisine de la position d'équilibre. Au contraire, en ce qui concerne les pressions hydrodynamiques qui sont produites par le mouvement, il

---

[1] Clebsch, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper.* (*Journal de Crelle*, Bd. LVII, p. 149; 1860.)

n'existe aucune destruction de ce genre; d'une manière générale, elles s'opposent en chaque point au mouvement du corps; l'action de ces forces est évidemment du même ordre que l'action totale des pressions hydrostatiques.

» Les considérations qui précèdent suffisent à montrer que les équations ordinaires du mouvement d'un corps flottant ne sont pas simplement insuffisantes et en quelque sorte réduites à la première approximation, mais qu'elles sont nécessairement fausses en ce qu'elles négligent des termes qui sont du même ordre que les termes conservés et qui parfois les surpassent, ainsi qu'il arrive lorsqu'on étudie le mouvement qu'un corps de révolution, d'axe vertical, peut prendre autour de cet axe. »

Après avoir formulé ces critiques, Clebsch cherche, à son tour, à donner une théorie satisfaisante des oscillations infiniment petites des corps flottants. Les considérations auxquelles il se livre l'amènent à écrire six équations pour déterminer comment varient, en fonctions du temps, les trois translations ξ, η, ζ et les trois rotations φ, ψ, ϑ, en lesquelles peut se décomposer le mouvement du flotteur; ces équations ont l'aspect d'équations différentielles linéaires à coefficients constants; mais le premier membre de chacune de ces égalités, au lieu d'être formé par un nombre limité de termes et de contenir les dérivées de la fonction inconnue seulement jusqu'à un certain ordre, est une série renfermant les dérivées de tous les ordres pairs de la fonction inconnue. A ces équations, Clebsch applique des considérations semblables à celles qui servent à intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants; il cherche à les vérifier par des expressions de la forme

$$\xi = \xi_0 e^{\sigma t}, \qquad \eta = \eta_0 e^{\sigma t}, \qquad \ldots$$

ξ_0, η_0, ..., σ étant des constantes. Le carré de la constante σ est déterminé par une certaine équation transcendante

$$f(\sigma^2) = 0.$$

Clebsch en conclut le théorème suivant :

« *L'équilibre d'un corps flottant est stable dans le cas suivant et*

seulement dans ce cas : c'est le cas où toutes les valeurs de σ^2 *qui résultent de l'équation*

$$f(\sigma^2) = 0$$

sont négatives. Cette équation dépend de la forme et de la position du corps, mais non des mouvements étrangers que le liquide possédait initialement. »

Sans vouloir examiner ici jusqu'à quel point les équations du mouvement d'un corps flottant, données par Clebsch, peuvent être assimilées à des équations différentielles linéaires à coefficients constants, nous ferons remarquer que la méthode suivie par Clebsch pour obtenir la condition de stabilité d'un corps flottant renferme un cercle vicieux; ce cercle est celui que Lejeune-Dirichlet a déjà signalé dans la démonstration donnée par Lagrange pour établir qu'un système est en équilibre stable lorsque son potentiel a une valeur minima. Pour former les équations du mouvement, Clebsch suppose que le corps demeure toujours infiniment voisin de sa position d'équilibre, c'est-à-dire que l'équilibre est stable; des équations qui renferment implicitement cette hypothèse ne peuvent servir à discuter si l'équilibre est stable ou instable. La méthode de Clebsch suffit à prouver que, lorsque l'équilibre est stable, la fonction $f(\sigma^2)$ ne s'annule pour aucune valeur réelle de σ; elle ne permet pas de démontrer la proposition réciproque.

Clebsch ne forme pas la fonction qu'il désigne par $f(\sigma^2)$; en sorte que, bien qu'il affirme l'existence d'une distinction essentielle entre la règle de stabilité imaginée par Poisson et par Duhamel et celle qu'il propose, on ne voit pas que cette distinction soit établie dans son Mémoire. Un calcul complet lui aurait montré que cette distinction n'est qu'apparente.

Pour éviter l'objection que l'on peut adresser à la méthode de Clebsch, une seule voie se présente; elle consiste à faire usage du principe si rigoureusement démontré par Lejeune-Dirichlet, et à chercher les conditions de stabilité du système en cherchant à rendre minimum le potentiel des actions auxquelles il est soumis.

Plusieurs essais ont été tentés dans cette voie. Nous laisserons de

côté ceux de Moseley ([1]) et de Duhil de Benazé et Risbec ([2]), qui n'ont apporté aucun progrès à la solution du problème de la stabilité des corps flottants soumis à des déplacements infiniment petits, et nous aborderons de suite les recherches de M. Guyou ([3]).

M. Guyou considère un flotteur immergé dans une cuve de *dimensions limitées;* il cherche à quelle condition le potentiel de ce système sera minimum, ou, ce qui revient au même pour un système soumis exclusivement à l'action de la pesanteur, à quelle condition le centre de gravité de ce système sera aussi bas que possible; par des démonstrations géométriques très simples et très élégantes qui rappellent les méthodes suivies par Bravais dans sa thèse de Mécanique, M. Guyou établit cette condition, qui est indépendante des dimensions de la cuve et qui, par conséquent, assurera encore la stabilité de l'équilibre du flotteur sur un liquide illimité; cette condition se trouve être précisément celle qu'avaient indiquée Poisson et Duhamel.

Les raisonnements de M. Guyou nous semblent cependant affectés d'une erreur qui en vicie les conclusions; comme cette erreur est assez délicate à apercevoir, nous croyons nécessaire d'y insister quelque peu.

M. Guyou démontre, en premier lieu, que si la surface libre du liquide n'était pas horizontale, on pourrait la déformer de manière à abaisser le centre de gravité du système, et cela sans déplacer le flotteur ni changer la partie de sa surface qui est immergée.

Il démontre, en second lieu, que si le poids du liquide déplacé n'était pas égal au poids du flotteur, une translation verticale convenablement choisie de ce dernier abaisserait le centre de gravité du système.

Il démontre, en troisième lieu, que si le centre de gravité du flotteur

---

([1]) Moseley, *On the dynamical stability and the oscillation of floating bodies* (*Philosophical Transactions;* 1850). *Voir* aussi : Sir E.-J. Reed, *The stability of ships.*

([2]) Duhil de Benazé et Risbec, *Mémoire sur le mouvement complet du navire oscillant sur eau calme* (*Mémorial du Génie maritime,* 10e liv., 1874; p. 175). *Voir* aussi : Pollard et Dudebout, *Théorie du Navire,* t. II, p. 329. Paris, 1891.

([3]) E. Guyou, *Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Revue maritime,* mars 1879, p. 682). — *Théorie du Navire,* p. 25. Paris, 1887.

n'était pas sur la même verticale que le centre de poussée et au-dessous des métacentres, on pourrait, par un déplacement qui n'altérerait pas le volume immergé, abaisser le centre de gravité du système.

De là, M. Guyou (¹) conclut que, pour qu'un corps flottant soit en équilibre stable, il est nécessaire et *suffisant :*

1° Que la surface libre du liquide soit horizontale;

2° Que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du flotteur;

3° Que le centre de gravité du flotteur et le centre de poussée soient sur une même verticale;

4° Que le centre de gravité du flotteur soit au-dessous des métacentres.

Il est bien clair que la nécessité de ces conditions pour assurer sinon que l'équilibre est stable, du moins que le centre de gravité du système est le plus bas possible, découle des propositions établies par M. Guyou; mais ces propositions ne nous semblent pas prouver que les conditions dont il s'agit *suffisent* à assurer la stabilité de l'équilibre.

M. Guyou n'indique pas explicitement comment il a été amené à conclure que ces conditions sont suffisantes; mais un passage de son Livre (²) nous met sur la voie qui permet de reconstituer sa pensée; voici ce passage :

« Pour amener à une position quelconque le système composé du flotteur et du liquide supposés primitivement en équilibre, on peut d'abord donner au flotteur l'orientation considérée en le maintenant isocarène dans le liquide en repos; conservant ensuite cette orientation, on l'élèvera ou on l'abaissera de la quantité nécessaire, et l'on donnera enfin au liquide son dénivellement. »

Guidés par ce passage, nous pensons pouvoir reconstituer, de la manière suivante, le raisonnement qui a sans doute conduit M. Guyou à énoncer la proposition que nous discutons :

Notre système, formé d'une masse liquide et d'un flotteur, est défini par certaines variables indépendantes, en nombre limité ou illi-

---

(¹) Guyou, *Théorie du Navire*, p. 30.

(²) *Ibid.*, p. 31.

mité. Les conditions précédemment énoncées suffiront à assurer la stabilité de l'équilibre du système si, grâce à elles, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables devient incapable d'abaisser le centre de gravité du système.

Or, la variation infiniment petite la plus générale de ces variables indépendantes peut toujours être regardée comme le résultat de trois autres variations infiniment petites des mêmes variables :

1° Une variation infiniment petite qui change l'orientation du flotteur sans altérer le volume immergé ni le niveau du liquide;

2° Une variation infiniment petite qui déplace verticalement le flotteur et le niveau du liquide, en laissant plan ce dernier;

3° Une variation infiniment petite qui déforme la surface du liquide sans déplacer le flotteur.

Chacune de ces variations partielles est incapable, lorsque les conditions énoncées sont vérifiées, d'abaisser le centre de gravité du système.

Mais, *lorsque des variations infiniment petites des variables qui fixent un système sont isolément incapables d'abaisser le centre de gravité du système, la variation infiniment petite que l'on obtient en les composant n'abaisse certainement pas le centre de gravité du système.*

Donc la variation infiniment petite la plus générale des variables qui fixent un système formé d'un liquide et d'un flotteur, ne peut abaisser le centre de gravité du système lorsque les quatre conditions énoncées sont vérifiées, en sorte que ces conditions assurent la stabilité de l'équilibre du système.

Ce raisonnement renferme une proposition sujette à critiques; c'est celle que nous avons mise en italiques.

En général, *cette proposition est exacte;* soient, en effet, α, β, ... les variables indépendantes qui fixent un système et ζ la cote du centre de gravité de ce système; si les variables α, β, ... éprouvent une variation infiniment petite $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., la cote ζ du centre de gravité éprouve une variation qui peut, en général, se mettre sous la forme

$$\delta\zeta = A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots, \tag{1}$$

A, B, ... étant des fonctions finies de α, β, ...

Imaginons alors qu'une première variation infiniment petite $\delta'\alpha$, $\delta'\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2) \qquad \delta'\zeta = A\,\delta'\alpha + B\,\delta'\beta + \ldots \geqq 0;$$

imaginons qu'une seconde variation infiniment petite $\delta''\alpha$, $\delta''\beta$, ... soit incapable d'abaisser le centre de gravité du système; nous aurons

$$(2\,bis) \qquad \delta''\zeta = A\,\delta''\alpha + B\,\delta''\beta + \ldots \geqq 0;$$

.....

Composons entre elles ces variations infiniment petites; nous obtiendrons une variation résultante

$$\Delta\alpha = \delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots,$$
$$\Delta\beta = \delta'\beta + \delta''\beta + \ldots,$$
.....

qui fera varier la cote du centre de gravité de

$$(3) \qquad \Delta\zeta = A(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots) + B(\delta\beta + \delta'\beta + \ldots) + \ldots.$$

Les égalités (2), (2 *bis*), ... et (3) permettront d'écrire

$$\Delta\zeta = \delta'\zeta + \delta''\zeta + \ldots \geqq 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Mais CETTE PROPOSITION DEVIENT INEXACTE DANS CERTAINS CAS EXCEPTIONNELS; *ce sont ceux où les valeurs de* α, β, ... *sont telles que toute variation infiniment petite du premier ordre imposée à ces variables entraîne une variation de la cote du centre de gravité qui est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.*

Imaginons, par exemple, que $\delta\zeta$ soit un infiniment petit du second ordre lorsque $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ... sont des infiniment petits du premier ordre;

nous devrons remplacer l'égalité (1) par une égalité telle que

$$(4) \qquad \delta\zeta = a_{11}(\delta\alpha)^2 + a_{22}(\delta\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\delta\alpha\,\delta\beta + \ldots,$$

les quantités a_{ij} étant finies; les égalités et inégalités (2) et (2 *bis*) seront remplacées par

$$(5) \qquad \delta'\zeta = a_{11}(\delta'\alpha)^2 + a_{22}(\delta'\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\delta'\alpha\,\delta'\beta + \ldots \geqq 0,$$

$$(5\ bis) \qquad \delta''\zeta = a_{11}(\delta''\alpha)^2 + a_{22}(\delta''\beta)^2 + \ldots + 2a_{12}\delta''\alpha\,\delta''\beta + \ldots \geqq 0.$$

Nous aurons également dans ce cas, au lieu de l'égalité (3),

$$\Delta\zeta = a_{11}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)^2 + a_{22}(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots)^2 + \ldots$$
$$+ 2a_{12}(\delta'\alpha + \delta''\alpha + \ldots)(\delta'\beta + \delta''\beta + \ldots) + \ldots.$$

On voit alors sans peine que les égalités ou inégalités (5) et (5 *bis*) n'entraînent pas nécessairement l'égalité ou inégalité

$$\Delta\zeta \geqq 0.$$

Or, c'est précisément dans un cas exceptionnel de ce genre que M. Guyou paraît avoir fait usage de la proposition en question; parmi les quatre conditions qu'il énonce, les trois premières expriment que la variation éprouvée par la cote du centre de gravité est un infiniment petit d'ordre supérieur aux variations infiniment petites des variables indépendantes.

Cette discussion montre que les raisonnements de M. Guyou ne permettent pas d'affirmer que les conditions par lui énoncées sont suffisantes pour assurer l'équilibre d'un système formé par un fluide et un corps flottant; nous verrons d'ailleurs, au cours du présent travail, que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre d'un corps flottant sur un fluide *limité;* mais c'est à des circonstances toutes spéciales que le raisonnement de M. Guyou, inexact en général, doit son succès dans ce cas particulier [1].

---

[1] Une étude analogue à celle de M. Guyou aurait été faite par Moreau (*Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement des corps flottants;* Brest, 1830). Il nous a été impossible de nous procurer cet Ouvrage, que nous citons d'après la *Théorie du navire* de MM. Pollard et Dudebout.

Cet exposé rapide nous montre que les conditions de stabilité d'un corps flottant sont loin d'être encore établies d'une manière certaine et rigoureuse, même dans le cas simple où le fluide et le flotteur sont soumis seulement à l'action de la pesanteur. Quant au cas plus général où le fluide et le flotteur sont soumis à des forces extérieures admettant une fonction potentielle quelconque, il est demeuré jusqu'ici inabordé.

C'est ce problème général que nous nous sommes proposé de traiter.

Nous avons composé le potentiel d'un système formé par un solide et un fluide, et nous avons cherché à quelles conditions le potentiel de ce système avait une valeur minima.

On sait, par la belle et rigoureuse démonstration de Lejeune-Dirichlet, que tout état où le potentiel d'un système a une valeur minima est un état d'équilibre stable; la réciproque de cette proposition est-elle vraie? N'y a-t-il pas d'autres états d'équilibre stable que ceux qui correspondent à une valeur minima du potentiel?

Cette réciproque est vraisemblable; toutefois, elle n'a pas été démontrée jusqu'ici d'une manière entièrement rigoureuse, et elle est généralement admise à titre de postulat.

Bien que ce postulat ne paraisse pas susceptible d'être démontré dans l'état actuel de la Mécanique, il nous semble que l'on peut le déduire, *du moins pour les systèmes dépourvus de frottement et de viscosité,* d'une autre proposition plus simple et dont l'acceptation s'impose plus aisément à l'esprit; cette proposition est la suivante :

Un état d'équilibre stable d'un système ne peut cesser d'être stable parce qu'on introduit dans le système de nouvelles liaisons indépendantes du temps.

Avant d'exposer cette déduction, quelques remarques sont nécessaires.

Considérons un système défini par n variables indépendantes α, β, ..., λ. Prenons un état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ de ce système.

Faisons ensuite choix d'une variable θ et de n fonctions $a(\theta)$,

$b(\theta), \ldots, l(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° Pour $\theta = \theta_0$, on a

$$a(\theta_0) = \alpha_0, \qquad b(\theta_0) = \beta_0, \qquad \ldots, \qquad l(\theta_0) = \lambda_0.$$

2° Lorsque θ croît à partir de θ_0, les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$ demeurent finies, continues et uniformes, du moins tant que θ ne surpasse pas une certaine limite ; de plus, les dérivées $\frac{d\,a(\theta)}{d\theta}$, $\frac{d\,b(\theta)}{d\theta}$, ..., $\frac{d\,l(\theta)}{d\theta}$ sont finies.

Si nous posons

$$(6) \qquad \alpha = a(\theta), \qquad \beta = b(\theta), \qquad \ldots, \qquad \lambda = l(\theta),$$

nous définirons une suite linéaire et continue d'états du système partant de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$ ou, en d'autres termes, une modification virtuelle finie issue de l'état $\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0$.

Cela posé, imaginons que le potentiel thermodynamique

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

du système ne soit pas minimum pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, ..., $\lambda = \lambda_0$.

Il est possible d'imaginer au moins une modification virtuelle finie, issue de l'état $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, le long de laquelle la fonction

$$\Phi(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$$

commence par ne pas croître. En d'autres termes, on doit pouvoir, au moins d'une manière, choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$, qui figurent dans les égalités (6), de manière que, pour toute valeur de θ supérieure à θ_0 et inférieure à une certaine limite Θ qui surpasse θ_0 d'une quantité finie, on ait

$$(7) \qquad \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)] - \Phi(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0) \leqq 0.$$

Considérons une de ces manières de choisir les fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$, ..., $l(\theta)$. Écrivons les égalités (6) ; entre ces égalités, éliminons

la variable θ ; nous trouvons les $(n-1)$ relations

$$(8)\qquad \begin{cases} f(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ g(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ h(\alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0. \end{cases}$$

Si nous imposons au système les $(n-1)$ liaisons bilatérales, indépendantes du temps, exprimées par les relations (8), nous le transformons en un système à liaisons complètes, ne dépendant plus que du seul paramètre θ; nous pourrons, en outre, imposer à ce système la liaison unilatérale et indépendante du temps

$$(9)\qquad \theta > \theta_0.$$

Le potentiel thermodynamique du système deviendra une simple fonction de θ,

$$\Psi(\theta) = \Phi[a(\theta), b(\theta), \ldots, l(\theta)]$$

et l'égalité ou inégalité (7) pourra s'écrire

$$(10)\qquad \Psi(\theta) - \Psi(\theta_0) \leqq 0.$$

Prenons le système dans l'état initial $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, où θ_0, et donnons à $\frac{d\theta}{dt}$ une valeur initiale v_0 qui soit *positive;* les divers points du système seront animés de vitesses initiales qui seront compatibles avec les liaisons (8) et (9); le système va prendre un mouvement que le principe des forces vives suffira à mettre en équation.

La force vive du système peut se mettre sous la forme $F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, la fonction $F(\theta)$ demeurant comprise entre deux limites positives M et m lorsque θ varie entre θ_0 et Θ.

Le principe des forces vives nous donne alors

$$(11)\qquad F(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = F(\theta_0)v_0^2 = [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)].$$

Cette égalité nous apprend tout d'abord que, tant que θ demeurera

compris entre θ_0 et Θ, $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut s'annuler; en effet, le premier terme du second membre est essentiellement positif et le second ne peut être négatif, d'après (10). La quantité $\frac{d\theta}{dt}$ ne pouvant changer de signe sans passer par 0, on voit que cette quantité, positive au début du mouvement, demeurera positive tant que θ n'aura pas franchi la limite Θ.

Si nous convenons de ne considérer que la partie du mouvement pendant laquelle θ n'a pas encore franchi la limite Θ, nous pourrons écrire l'égalité (11) sous la forme

$$(12) \qquad dt = d\theta \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0)c_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}},$$

le radical étant pris en valeur absolue.

Le système, partant de l'état caractérisé par la valeur θ_0 du paramètre variable, atteindra pour la première fois l'état caractérisé par la valeur Θ du même paramètre au bout d'un temps

$$(13) \qquad T = \int_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{\frac{F(\theta)}{F(\theta_0)c_0^2 + [\Psi(\theta_0) - \Psi(\theta)]}}\, d\theta.$$

On voit sans peine que l'égalité (13) permet d'écrire

$$(14) \qquad T \leqq \sqrt{\frac{M}{F(\theta_0)}}\, \frac{\Theta - \theta_0}{c_0}.$$

Ainsi, quelle que soit la valeur initiale donnée de c_0, on pourra fixer un temps fini au bout duquel le système aura passé au moins une fois tous les états caractérisés par des valeurs du paramètre variable comprises entre θ_0 et Θ.

Cette proposition démontre que l'état θ_0, ou $(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0)$, n'est pas un état d'équilibre stable pour le système soumis aux liaisons (8) et (9); dès lors, d'après le principe que nous avons admis, ce ne peut être non plus un état d'équilibre stable pour le système non soumis à ces liaisons et nous arrivons ainsi à la proposition suivante, réci-

proque du théorème de Lejeune-Dirichlet :

Un état où le potentiel thermodynamique d'un système n'a pas une valeur minima ne peut être, pour ce système, un état d'équilibre stable.

C'est sur cette proposition que nous allons nous appuyer, en même temps que sur le théorème de Lejeune-Dirichlet, pour traiter de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

Ce n'est cependant pas ce problème que nous traiterons en premier lieu; nous commencerons par étudier la stabilité de l'équilibre d'un système de fluides ne portant pas de flotteur; ce problème, plus simple que la question de la stabilité de l'équilibre des corps flottants, la précède logiquement. La méthode employée, les résultats obtenus en étudiant les fluides qui ne portent pas de flotteur préparent l'étude des fluides qui portent un flotteur.

Ce que nous dirons ici au sujet de la stabilité d'un système composé exclusivement de fluides n'est pas entièrement inédit; après avoir amorcé cette question dans un premier travail (1), nous l'avons développée en partie dans le cours (2) que nous avons professé à la Faculté des Sciences de Lille, en 1890-1891; plus récemment, nous avons traité complètement (3) la stabilité de l'équilibre d'un nombre quelconque de fluides mélangés, question qui renferme comme cas particulier celle dont nous parlons en ce moment. Néanmoins, nous avons cru devoir traiter ici la stabilité de l'équilibre d'un système composé uniquement de fluides non mélangés, parce que ce problème, incomplètement résolu dans nos deux premières publications, se trouvait, dans la troisième, impliqué dans un problème plus général.

Après un premier Chapitre, consacré à la stabilité de l'équilibre de fluides qui ne portent pas de flotteur, un deuxième Chapitre traite des

(1) *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrostatique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV, C. 1890).

(2) *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*. Liv. II, Chap. II. Paris, 1891.

(3) *Dissolutions et mélanges;* premier Mémoire : *L'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III. B. 1893).

conditions d'équilibre des corps flottants; c'est seulement alors que, toutes les propositions préliminaires étant établies, nous abordons, dans un troisième Chapitre, l'étude générale de la stabilité de l'équilibre des corps flottants.

CHAPITRE I.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DE FLUIDES QUI NE PORTENT PAS DE FLOTTEUR.

I. — *Rappel des principes de l'Hydrostatique.*

Considérons un fluide ayant en tout point la même température; nous supposerons que l'état de ce fluide soit entièrement déterminé lorsqu'on connaît la forme de la surface qui le limite et la densité ρ en chaque point (x, y, z) de l'espace que cette surface enferme; cette densité est supposée fonction continue de x, y, z. Lorsque deux fluides différents sont en contact, la densité varie d'une manière discontinue à la traversée de la surface de contact.

Nous admettrons, ce qui implique certaines hypothèses que nous avons détaillées ailleurs [1], que le potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux semblables fluides 1 et 2 est donné par la formule suivante

$$(1) \qquad \mathcal{F} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2,$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_1 du fluide 1 et la seconde intégrale s'étendant à tous les éléments de volume dv_2 du fluide 2; la fonction φ_1 et la fonction φ_2 sont deux fonctions analytiques différentes, caractéristiques des fluides 1 et 2.

Les forces extérieures appliquées au système sont de deux sortes :

1° Chaque élément dS de la partie déformable de la surface qui limite le système supporte une force dont les composantes sont

$$P\cos(P, x)\, dS, \quad P\cos(P, y)\, dS, \quad P\cos(P, z)\, dS.$$

---

[1] P. Duhem, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique.* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. X, p. 183; 1893.)

2° Chaque élément de volume dv de l'un des fluides, élément dont la masse est $\rho\, dv$, est soumis à une force dont les composantes sont

$$\rho X\, dv, \quad \rho Y\, dv, \quad \rho Z\, dv.$$

Ces principes posés, on peut établir d'une manière très rigoureuse [1] les propositions suivantes, qui sont, pour la plupart, très anciennement connues, et qui sont les fondements de l'Hydrostatique :

1° Il existe une fonction Π_1, uniforme, finie, continue, douée de dérivées partielles, en tous les points du fluide 1 ; il existe une fonction Π_2 possédant les mêmes propriétés en tous les points du fluide 2.

La fonction Π_1 n'est négative en aucun point du fluide 1 ; la fonction Π_2 n'est négative en aucun point du fluide 2.

2° En tout point du fluide 1, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_1 X &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ \rho_1 Y &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ \rho_1 Z &= \frac{\partial \Pi_1}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \Pi_1 = 0.$$

3° En tout point du fluide 2, on a

$$(2\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho_2 X &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial x}, \\ \rho_2 Y &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial y}, \\ \rho_2 Z &= \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \end{aligned} \right.$$

$$(3\ bis) \qquad \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \Pi_2 = 0.$$

---

[1] P. Duhem, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique,* cours professé à la Faculté des Sciences de Lille en 1890-1891, t. I, p. 60-80. Paris, 1891.

4° En tout point de la surface de contact S_{12} des fluides 1 et 2, on a

$$(4) \qquad \Pi_1 = \Pi_2.$$

5° En tout point de la partie déformable S_1 de la surface qui sépare le fluide 1 de l'extérieur, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} P\cos(P, x) = \Pi_1 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) = \Pi_1 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) = \Pi_1 \cos(n_i, z), \end{cases}$$

n_i étant la normale menée à la surface S_1 par le point considérée et dirigée vers l'intérieur du fluide 1.

6° En tout point de la partie déformable S_2 de la surface qui sépare le fluide 2 de l'extérieur, on a

$$(5\ bis) \qquad \begin{cases} P\cos(P, x) = \Pi_2 \cos(n_i, x), \\ P\cos(P, y) = \Pi_2 \cos(n_i, y), \\ P\cos(P, z) = \Pi_2 \cos(n_i, z). \end{cases}$$

D'après l'égalité (3), la densité ρ_1, en un point du premier fluide, dépend uniquement de la pression Π_1 en ce point; écrivons abréviativement l'égalité (3)

$$(6) \qquad \rho_1 = F_1(\Pi_1).$$

Moyennant cette égalité (6), les égalités (2) deviennent

$$(7) \qquad \begin{cases} F_1(\Pi_1) X = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x}, \\ F_1(\Pi_1) Y = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y}, \\ F_1(\Pi_1) Z = \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Désignons par V_1 une fonction uniforme, finie et continue des coor-

données x_1, y_1, z_1 d'un point de l'espace occupé par le fluide 1, telle que l'on ait

$$(8) \qquad \frac{1}{F_1(\Pi_1)} d\Pi_1 + dV_1 = 0.$$

Cette fonction V_1 sera définie à une constante près. Les égalités (7) deviendront alors

$$(9) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_1 = 0,$$

en sorte que l'on aura, en tout point du fluide 1,

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Écrivons de même l'égalité (2 *bis*) sous la forme

$$\rho_2 = F_2(\Pi_2).$$

Désignons par V_2 une fonction uniforme, finie et continue des coordonnées x_2, y_2, z_2 d'un point de l'espace occupé par le fluide 2, définie, à une constante près, par l'égalité

$$(8\ bis) \qquad \frac{1}{F_2(\Pi_2)} d\Pi_2 + dV_2 = 0.$$

Nous aurons alors, en tout point du fluide 2,

$$(9\ bis) \qquad X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + dV_2 = 0,$$

en sorte que les fonctions X, Y, Z vérifieront encore les égalités (10) en tout point de l'espace occupé par le fluide 2.

Les fonctions X, Y, Z, vérifiant les égalités (10) en tout point du système, il existe une fonction V des coordonnées d'un point du système, variable d'une manière continue dans tout l'espace occupé par

le système, telle que l'on ait

$$(11)\qquad \begin{cases} X + \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ Y + \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \\ Z + \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Seulement, si l'espace occupé par le système n'est pas simplement connexe, cette fonction peut n'être pas uniforme. Cette fonction est d'ailleurs définie à une constante près.

Dans l'espace occupé par le fluide 1, les deux fonctions V et V_1 sont continues et ont les mêmes dérivées partielles; elles ne diffèrent donc que par une constante, en sorte que l'on a

$$V = V_1 + C_1.$$

D'ailleurs la fonction V_1 est une fonction uniforme des coordonnées d'un point de l'espace occupé par le fluide 1; la fonction V demeure donc uniforme si le point (x, y, z) auquel elle se rapporte varie seulement à l'intérieur du fluide 1.

Des considérations analogues s'appliquent au fluide 2.

Ainsi, pour que des forces extérieures puissent maintenir en équilibre un système formé d'un certain nombre de fluides, il faut qu'elles admettent une fonction potentielle V en tout point de l'espace occupé par ces fluides. Cette fonction potentielle n'est pas forcément uniforme dans tout l'espace occupé par le système; mais elle est uniforme dans chaque espace partiel qu'occupe chacune des masses fluides connexes qui composent le système.

On voit, par conséquent, que les surfaces qui limitent les divers fluides connexes ou les séparent les uns des autres forment autant de surfaces-coupures, transformant la fonction continue, mais non forcément uniforme, V en un groupe de fonctions $V_1, V_2, \ldots, V_n$, séparément uniformes et continues, mais ne se raccordant pas l'une à l'autre avec continuité.

L'égalité (8) donne

$$V_1 = \Phi_1(\Pi_1) \tag{12}$$

ou, en résolvant cette équation par rapport à Π_1,

$$\Pi_1 = G_1(V_1). \tag{13}$$

La fonction $G_1(V_1)$ est une fonction uniforme de V_1; en effet, la fonction $F_1(\Pi_1)$, qui est égale à la densité ρ_1 du fluide 1, est essentiellement positive; l'égalité (8) montre alors que V_1 diminue constamment lorsque Π_1 augmente, en sorte qu'une valeur de V_1 ne peut correspondre à plus d'une valeur de Π_1.

Chacune des surfaces définies, à l'intérieur du fluide 1, par une équation telle que

$$V_1 = \text{const.},$$

ou, ce qui revient au même, telle que

$$V = \text{const.},$$

est alors une surface d'égale pression; elle est aussi, d'après l'égalité (6), une surface d'égale densité. Une telle surface se nomme, comme on sait, une *surface de niveau*.

Lorsqu'une partie déformable de la surface qui limite le système fluide est soumise à une pression uniforme et donnée P_0, cette portion de surface prend le nom de *surface libre*.

Si nous considérons une surface libre connexe, confinant, par exemple, au fluide 1, on aura, en tout point de cette surface, $\Pi_1 = P_0$, et, par conséquent, V_1 aura, en tout point de cette surface, la valeur constante $\Phi_1(P_0)$; d'où le théorème suivant :

Toute portion connexe de surface libre est située dans une même surface de niveau.

Si la surface libre d'un système liquide se compose de plusieurs parties différentes, non connexes entre elles mais confinant avec une même masse fluide connexe 1, ces diverses parties seront encore si-

tuées dans une même surface de niveau; si, au contraire, ces diverses portions de surface libre ne confinent pas à une même masse fluide connexe, elles pourront être situées dans des surfaces de niveau différentes.

En tout point de la surface de séparation de deux fluides continus 1 et 2, on doit avoir

$$\Pi_1 = \Pi_2. \tag{4}$$

On a, d'ailleurs,

$$\Pi_1 = G_1(V_1), \tag{13}$$

$$\Pi_2 = G_2(V_2). \tag{13 bis}$$

L'égalité (4) devient donc

$$G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0. \tag{14}$$

Si donc dx, dy, dz sont les composantes d'un déplacement infiniment petit effectué sur la surface de séparation, on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dG_1(V_1)}{dV_1}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}dx + \frac{\partial V_1}{\partial y}dy + \frac{\partial V_1}{\partial z}dz\right) \\ &- \frac{dG_2(V_2)}{dV_2}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}dx + \frac{\partial V_2}{\partial y}dy + \frac{\partial V_2}{\partial z}dz\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Mais, en tout point de la surface commune aux deux fluides, on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \frac{\partial V_2}{\partial x} = -X = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} = \frac{\partial V_2}{\partial y} = -Y = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{\partial V_2}{\partial z} = -Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

On a d'ailleurs, d'après les égalités (13) et (13 *bis*),

$$\frac{dG_1(V_1)}{dV_1}dV_1 + d\Pi_1 = 0,$$

$$\frac{dG_2(V_2)}{dV_2}dV_2 + d\Pi_2 = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (8) et (8 *bis*),

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{dG_1(V_1)}{dV_1} = F_1(\Pi_1), \\ \dfrac{dG_2(V_2)}{dV_2} = F_2(\Pi_2). \end{cases}$$

Si donc nous désignons par Π la valeur commune des pressions Π_1, Π_2, en un point de la surface S_{12}, l'égalité (15) deviendra

$$(17)\qquad [F_1(\Pi) - F_2(\Pi)]\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = 0.$$

Si, sous la pression Π qui règne à la surface de contact, les deux fluides n'ont pas la même densité, $F_1(\Pi)$ n'est pas égal à $F_2(\Pi)$ et l'équation (17) devient

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = 0.$$

En sorte que *toute portion connexe de la surface de contact de deux fluides de densité différente est une surface de niveau.*

Si, au contraire, les deux fluides ont la même densité, $F_1(\Pi)$ est égal à $F_2(\Pi)$; l'égalité (17) est satisfaite identiquement et la forme de la surface de contact est indéterminée.

Si deux fluides différents, 1 et 2, formant chacun une masse connexe, sont en contact le long de plusieurs surfaces séparées, on peut se demander si ces diverses surfaces sont ou ne sont pas dans une même surface de niveau.

Il n'est pas possible de donner une réponse entièrement générale à cette question. Toutefois, si l'un des fluides, le fluide 1 par exemple, est toujours plus dense que l'autre fluide, le fluide 2, quelles que soient les pressions ϖ_1, ϖ_2, sous lesquelles ces deux fluides sont pris (ces pressions étant, toutefois, comprises parmi celles qui sont réalisées au sein du système), on peut affirmer que les diverses parties de la surface de contact sont dans une même surface de niveau.

Imaginons, en effet, que S_{12}, S'_{12} soient deux parties différentes de la surface de contact; la première correspond à des valeurs V_1, V_2, Π des fonctions considérées dans ce qui précède; la seconde, à des va-

leurs V'_1, V'_2, Π' des mêmes fonctions. Nous aurons les égalités

$$(17) \qquad G_1(V_1) - G_2(V_2) = 0.$$

$$(17\ bis) \qquad G_1(V'_1) - G_2(V'_2) = 0.$$

De ces égalités nous déduisons

$$G_1(V'_1) - G_1(V_1) - G_2(V'_2) + G_2(V_2) = 0$$

ou bien

$$(18) \qquad \int_{V_1}^{V'_1} \frac{dG_1(v)}{dv}\,dv - \int_{V_2}^{V'_2} \frac{dG_2(v)}{dv}\,dv = 0.$$

Mais nous savons que l'on peut écrire, à l'intérieur du fluide 1,

$$V_1 = V - C_1,$$

C_1 étant une constante, et à l'intérieur du fluide 2,

$$V_2 = V - C_2,$$

C_2 étant une constante. La fonction V étant continue dans tout l'espace, nous concluons aisément de là que

$$V'_1 - V_1 = V'_2 - V_2.$$

L'égalité (18) peut alors s'écrire

$$(19) \qquad (V'_1 - V_1)\left[\frac{dG_1(U_1)}{dU_1} - \frac{dG_2(U_2)}{dU_2}\right] = 0,$$

U_1 étant compris entre V_1 et V'_1 et U_2 entre V_2 et V'_2.

Soient ϖ_1, ϖ_2 les valeurs de Π_1, Π_2, qui correspondent aux valeurs U_1, U_2 de V_1, V_2. Les égalités (16) nous donneront

$$\frac{dG_1(U_1)}{dU_1} = F_1(\varpi_1),$$

$$\frac{dG_2(U_2)}{dU_2} = F_2(\varpi_2).$$

D'ailleurs, d'après l'égalité (8), V_1 varie toujours en sens contraire

de Π_1; U_1 étant compris entre V_1 et V'_1, ϖ_1 sera compris entre Π' et Π; de même ϖ_2 sera compris entre Π et Π'. L'égalité (19) deviendra donc

$$(V'_1 - V_1)[F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2)] = 0,$$

les pressions ϖ_1 et ϖ_2 étant toutes deux comprises entre Π et Π', et, par conséquent, se trouvant au nombre des pressions réalisées au sein du système.

Mais, par hypothèse, le fluide 1 est plus dense sous la pression ϖ_1 que le fluide 2 sous la pression ϖ_2; on a donc

$$F_1(\varpi_1) - F_2(\varpi_2) > 0,$$

en sorte que l'égalité précédente devient

$$V'_1 - V_1 = 0.$$

Il en résulte que les deux surfaces S_{12}, S'_{12} sont, comme nous l'avions annoncé, dans une même surface de niveau.

§ II. — *Fluide soumis à une pression uniforme et constante; potentiel thermodynamique de ce fluide; variation première de ce potentiel.*

Nous avons vu que l'on avait, dans tout l'espace occupé par le fluide,

$$(11) \qquad X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

la fonction V étant une fonction continue de x, y, z, mais pouvant n'être pas uniforme lorsque le système est formé de plusieurs fluides distincts, et que l'espace qu'il remplit n'est pas simplement connexe.

Nous admettrons désormais que l'on peut tracer autour du système une surface dont tous les points soient à une distance finie de la surface qui limite le système; qu'il existe une certaine fonction V, *uniforme*, finie et continue à l'intérieur de cette surface, telle qu'une

masse fluide dm, placée au point (x, y, z), soit soumise à une force ayant pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial y}dm, \quad -\frac{\partial V}{\partial z}dm.$$

Cette hypothèse admise, considérons la quantité

$$W = \int V \rho \, dv, \tag{20}$$

dans laquelle l'intégrale s'étend au volume entier d'un fluide continu et cherchons quelle variation subit cette quantité W lorsqu'on impose au fluide une modification infiniment petite.

Soit ρ la densité du fluide, au commencement de la modification, en un point d'un élément de volume dv, fixe dans l'espace; soit $(\rho + \delta\rho)$ la densité, au sein du même élément de volume, à la fin de la modification; soient S la surface primitive du fluide et S′ la surface déformée; soit ε une quantité dont la valeur absolue est la distance normale infiniment petite des deux surfaces S, S′, dont le signe est le signe + dans les régions où la surface S′ est extérieure à la surface S et le signe — dans les régions où la surface S′ est intérieure à la surface S; nous aurons évidemment

$$\delta W = \int V \delta\rho \, dv + \int V \rho \varepsilon \, dS, \tag{21}$$

la première intégrale s'étendant au volume du fluide, et la seconde à la surface qui le limite.

Cette égalité (21) peut se transformer.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement du point matériel qui avait pour coordonnées x, y, z, au début de la modification; nous aurons, en désignant par n_i la normale à la surface S vers l'intérieur du fluide,

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right),$$
$$\varepsilon = \cos(n_i, x)\,\delta x + \cos(n_i, y)\,\delta y + \cos(n_i, z)\,\delta z.$$

en sorte que l'égalité (21) deviendra

$$\delta W = -\int \rho V\left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right) dv$$
$$-\int \rho V[\cos(n_i, x)\delta x + \cos(n_i, y)\delta y + \cos(n_i, z)\delta z]\, dS.$$

Des intégrations par parties transforment aisément cette égalité en

$$\delta W = \int \rho\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) dv$$

ou bien, en vertu des égalités (11), en

$$\delta W = -\int \rho(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\, dv.$$

L'intégrale qui figure au second membre est évidemment le travail virtuel, effectué dans la modification considérée, par l'ensemble des forces appliquées aux diverses masses élémentaires qui composent le fluide. Donc, *moyennant les hypothèses faites, les forces appliquées aux divers éléments de masse qui composent un fluide admettent un potentiel* W, *défini par l'égalité* (20).

Si le système était composé de deux fluides, 1 et 2, le potentiel des forces qui agissent sur les divers éléments de masse qui le forment serait donné par l'égalité

$$(20\ bis) \qquad W = \int_1 V\rho_1\, dv_1 + \int_2 V\rho_2\, dv_2.$$

La variation que cette quantité éprouve dans une modification infiniment petite du fluide s'obtiendra par une formule analogue à la formule (21); si nous désignons par ε_1 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'extérieur du fluide 1, et par ε_2 une quantité, analogue à ε, comptée positivement vers l'intérieur du fluide 2, nous aurons

$$(21\ bis) \qquad \left\{\begin{aligned} \delta W = &\int_1 V\,\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 V\,\delta\rho_2\, dv_2 \\ &+ \int_1 V\rho_1\varepsilon_1\, dS_1 + \int_2 V\rho_2\varepsilon_2\, dS_2 \\ &+ \int_{S_{12}} V(\rho_1\varepsilon_1 + \rho_2\varepsilon_2)\, dS_{12}. \end{aligned}\right.$$

Les pressions appliquées à la surface déformable du système n'admettent pas, en général, de potentiel; il faut, toutefois, faire exception à cette règle dans le cas où *les parties déformables* S_1, S_2 *de la surface qui limite le système supportent une pression uniforme qui garde une valeur invariable* P_0 *pendant les diverses modifications du système;* dans ce cas particulier, où nous nous supposerons placé désormais, les pressions extérieures admettent, comme l'on sait, pour potentiel la fonction

$$W' = P_0\left(\int_1 dv_1 + \int_2 dv_2\right), \tag{22}$$

dont la variation est

$$\delta W' = P_0\left(\int_{S_1} \varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varepsilon_2\, dS_2\right). \tag{23}$$

En toutes circonstances, le système admet pour potentiel thermodynamique interne la quantité

$$\bar{\pi} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2, \tag{1}$$

dont la variation est

$$\left\{\begin{aligned} \delta\bar{\pi} = &\int_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\,\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\,\delta\rho_2\, dv_2 \\ &+ \int_{S_1} \varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2\, dS_2 \\ &+ \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1)\varepsilon_1 + \varphi_2(\rho_2)\varepsilon_2]\, dS_{12}. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Si donc on admet les deux hypothèses indiquées dans le présent paragraphe, on voit que *le système admet un potentiel thermodynamique total;* ce potentiel a pour expression, en vertu des égalités (1), (20 *bis*) et (22),

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \bar{\pi} + W + W' \\ &= \int_1 [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\, dv_1 + \int_2 [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\, dv_2. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Dans une modification infiniment petite du fluide, cette quantité Φ éprouve une variation $\delta\Phi$, qui a pour valeur, d'après les égalités (24), (21 *bis*) et (23),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\Phi = &\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right]\delta\rho_2\, dv_2\\ &+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1\\ &+ \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\varepsilon_2\, dS_2\\ &+ \int_{S_{12}} \left\{[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\varepsilon_2\right\} dS_{12}.\end{aligned}\right.$$

On remarquera que cette formule, très générale, ne suppose pas que le système fluide auquel on l'applique soit en équilibre.

§ III. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique.*

Une variation infiniment petite des variables indépendantes dont dépend l'état du système a fait subir au potentiel thermodynamique une variation $\delta\Phi$, donnée par l'égalité (26); donnons, de nouveau, la même variation aux variables indépendantes et cherchons la variation $\delta^2\Phi$ que subit la quantité $\delta\Phi$.

La variation de la quantité $\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\, dv_1$ est aisée à former. Nous avons évidemment

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}\delta\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\, dv_1 = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1\\ &+ \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1\, dv_1\\ &+ \int_{S_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_1\\ &+ \int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_{12}.\end{aligned}\right.$$

La variation de la quantité $\int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2\, dv_2$ s'exprime d'une manière analogue.

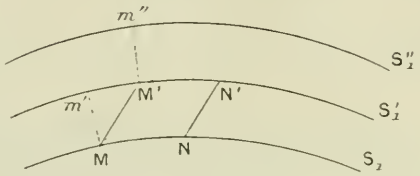
Le calcul de la quantité

$$\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1$$

nécessite quelques explications plus détaillées.

S_1 (*fig.* 1) est la position initiale de la surface S_1; S'_1 sa position

Fig. 1.



après la première variation; S''_1 sa position après la seconde variation.

Faisons correspondre, *suivant une loi quelconque*, un point M' de la surface S'_1 à chaque point M de la surface S_1, cette loi étant seulement assujettie à faire correspondre des points infiniment voisins à des points infiniment voisins.

Ce mode de correspondance fait correspondre à l'élément superficiel $MN = dS_1$ l'élément superficiel $M'N' = dS'_1$.

Pour calculer la nouvelle valeur prise par l'intégrale

$$\int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1,$$

il faut substituer à $[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]$ la valeur $[\varphi_1(\rho'_1) + V\rho'_1]$ que prend la même quantité non plus au point M, au commencement de la première modification, mais au point M', au commencement de la deuxième modification; à la distance normale $\varepsilon_1 = Mm'$ du point M à la surface S'_1 la distance normale $\varepsilon'_1 = M'm''$ du point M' à la surface S''_1; à l'élément dS_1, l'élément dS'_1; enfin intégrer non plus pour la surface S_1, mais pour la surface S'_1. La nouvelle valeur de notre intégrale sera donc

$$\int_{S'_1} [\varphi_1(\rho'_1) + V\rho'_1 + P_0]\varepsilon'_1\, dS'_1.$$

et la variation cherchée aura pour valeur

$$\begin{aligned}
&\delta \int [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
= &\int_{S_1} [\varphi_1(\rho'_1) - \varphi_1(\rho_1) + V(\rho'_1 - \rho_1) + \rho_1(V' - V)]\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0](\varepsilon'_1 - \varepsilon_1) dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 (dS'_1 - dS_1).
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
\rho'_1 - \rho_1 &= D\rho_1, \\
V' - V &= DV, \\
\varepsilon'_1 - \varepsilon_1 &= D\varepsilon_1, \\
dS'_1 - dS_1 &= D\, dS'_1
\end{aligned}$$

et nous aurons

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned}
&\delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\
= &\int_{S_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] D\rho_1 \varepsilon_1 dS_1 + \int_{S_1} \rho_1 DV \varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] D\varepsilon_1 dS_1 \\
&+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] \varepsilon_1 D\, dS_1.
\end{aligned} \right.$$

Soient Dx, Dy, Dz les composantes du segment MM'; nous aurons

$$(29) \qquad DV = \frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz.$$

Si ρ_1 est la densité, au point M, au commencement de la première modification, la densité au même point et au commencement de la deuxième modification est $(\rho_1 + \delta\rho_1)$; la densité au point M′ et au

commencement de la deuxième modification est alors

$$\rho_1 + D\rho_1 = \rho_1 + \delta\rho_1 + \frac{\partial(\rho_1 + \delta\rho_1)}{\partial x} Dx + \frac{\partial(\rho_1 + \delta\rho_1)}{\partial y} Dy + \frac{\partial(\rho_1 + \delta\rho_1)}{\partial z} Dz.$$

On a donc, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$(30) \qquad D\rho_1 = \delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz.$$

En vertu des égalités (29) et (30), l'égalité (28) devient

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} & \delta \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1 dS_1 \\ = & \int_{S_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1 \varepsilon_1 dS_1 \\ & + \int_{S_1} \left\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right] Dx \right. \\ & \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right] Dy \\ & \qquad \left. + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right] Dz \right\} \varepsilon_1 dS_1 \\ & + \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0] D(\varepsilon_1 dS_1). \end{aligned} \right.$$

Les quantités

$$\delta \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\varepsilon_2 dS_2,$$

$$\delta \int_{S_{12}} \{[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\varepsilon_2\} dS_{12}$$

se calculent d'une manière analogue.

Nous avons laissé entièrement quelconque la loi de correspondance établie entre un point $M(x, y, z)$ de la surface primitive et un point $M'(x + Dx, y + Dy, z + Dz)$ de la surface déformée; nous avons supposé que cette loi faisait toujours correspondre deux points infini-

ment voisins M′, N′ de la surface déformée à deux points infiniment voisins, M, N, de la surface primitive. *Dans certains cas, il est commode de faire correspondre au point géométrique* M, *où se trouvait un certain point matériel du fluide au début de la première modification, le point géométrique* M′ *où se trouve le même point matériel à la fin de la première modification;* on a alors

$$(32) \qquad Dx = \delta x, \qquad Dy = \delta y, \qquad Dz = \delta z,$$

δx, δy, δz étant les composantes du déplacement virtuel du fluide au point M. Lorsque nous adopterons ce mode particulier de correspondance, nous conviendrons d'écrire $\delta\varepsilon$, $\delta\, dS$, au lieu de $D\varepsilon$, $D\, dS$. Il ne faut pas oublier que *l'adoption de ce mode de correspondance n'est nullement obligatoire;* dans certains cas, il est plus commode d'en adopter un autre.

§ IV. — *Expression de la variation seconde dans le cas où le système est en équilibre.*

Les résultats précédents nous permettent d'écrire la forme générale de $\delta^2\Phi$. Il nous sera utile, pour les développements qui vont suivre, de chercher l'expression de $\delta^2\Phi$ dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre.

Pour cela, il nous faudra introduire dans l'expression de $\delta^2\Phi$ les simplifications qui résultent des conditions d'équilibre données au § I. Mais ces simplifications se trouveront indiquées d'une manière toute naturelle si nous donnons aux conditions d'équilibre la forme que l'on obtient en exprimant que l'on doit avoir

$$(33) \qquad \delta\Phi = 0,$$

pour toute modification virtuelle du système.

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{12},

$$(34) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,$$

l'égalité (33) pourra s'écrire, en vertu de l'égalité (26),

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ &+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0]\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0]\varepsilon_2\, dS_2 \\ &+ \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0. \end{aligned}\right.$$

Cette égalité (35) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des corps 1 et 2. Ces conditions s'expriment par les égalités

$$\delta \int_1 \rho_1\, dv_1 = 0, \qquad \delta \int_2 \rho_2\, dv_2 = 0,$$

qui peuvent encore s'écrire

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta\rho_1\, dv_1 + \int_{S_1} \rho_1\varepsilon_1\, dS_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \\ &\int_{S_1} \delta\rho_2\, dv_2 + \int_{S_2} \rho_2\varepsilon_2\, dS_2 + \int_{S_{12}} \rho_2\varepsilon_2\, dS_{12} = 0. \end{aligned}\right.$$

L'égalité (35) devant avoir lieu toutes les fois que les égalités (34) et (36) ont lieu, il doit exister deux constantes C_1 et C_2, telles que l'on ait

$$(37)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1\right] \delta\rho_1\, dv + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2\right] \delta\rho_2\, dv_2 \\ &+ \int_{S_1} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 + P_0 + C_1\rho_1]\varepsilon_1\, dS_1 \\ &+ \int_{S_2} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2 + P_0 + C_2\rho_2]\varepsilon_2\, dS_2 \\ &+ \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1 - C_1\rho_1 - \varphi_2(\rho_2) - V\rho_2 - C_2\rho_2]\varepsilon_1\, dS_{12} = 0, \end{aligned}\right.$$

quelles que soient les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2.

Par conséquent, *on doit avoir, en désignant par* C_1 *et* C_2 *deux constantes :*

1° *En tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0, \tag{38}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0; \tag{38 bis}$$

2° *En tout point de la surface* S_1,

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 + P_0 = 0, \tag{39}$$

et, en tout point de la surface S_2,

$$\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2 + P_0 = 0; \tag{39 bis}$$

3° *En tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{40}$$

Avant de faire usage de ces conditions d'équilibre, assurons-nous qu'elles résultent des conditions posées au § I.

Les égalités (2) nous donnent, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = 0.$$

D'autre part, l'égalité (3) nous donne

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - \rho_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0.$$

Ces égalités nous montrent que l'on a, en tout point du fluide 1,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V\right]=0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+V+C_1=0, \tag{38}$$

C_1 étant une constante. L'égalité (38 *bis*) se déduit de même des égalités (2 *bis*) et (3 *bis*).

Les égalités (3) et (38) donnent, en tout point du fluide 1,

$$\varphi_1(\rho_1)+(V+C_1)\rho_1+\Pi_1=0. \tag{41}$$

Les égalités (3 *bis*) et (38 *bis*) donnent, en tout point du fluide 2,

$$\varphi_2(\rho_2)+(V+C_2)\rho_2+\Pi_2=0. \tag{41 bis}$$

Observons que l'on a, en tout point de la surface S_1, $\Pi_1=P_0$; en tout point de la surface S_2, $\Pi_2=P_0$; enfin, en tout point de la surface S_{12}, $\Pi_1=\Pi_2$, et nous verrons sans peine que les égalités (41) et (41 *bis*) donnent les égalités (39), (39 *bis*) et (40).

Revenons maintenant aux égalités (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), et voyons quelles simplifications subit l'expression de $\delta^2\Phi$ lorsqu'on les suppose vérifiées.

Les modifications virtuelles auxquelles se rapporte la variation seconde $\delta^2\Phi$ ne sont pas quelconques; elles laissent constante la masse de chacun des deux fluides 1 et 2, en sorte qu'elles sont assujetties aux égalités

$$\delta\int_1\rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta\int_2\rho_2\,dv_2=0,$$

$$\delta^2\int_1\rho_1\,dv_1=0,\qquad \delta^2\int_2\rho_2\,dv_2=0.$$

Les deux premières égalités équivalent, nous l'avons vu, aux éga-

lités (36); quant aux deux dernières, elles peuvent se transformer par un raisonnement semblable à celui qui fait connaître $\delta^2\Phi$; elles prennent alors la forme suivante :

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_1 \delta^2\rho_1\, dv_1 + 2\int_{S_1} \delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1\varepsilon_1\, dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_1}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_1\\
&\quad + \int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_1}\rho_1\,\mathrm{D}(\varepsilon_1\, dS_1) + \int_{S_{12}}\rho_1\,\mathrm{D}(\varepsilon_1\, dS_{12}) = 0,
\end{aligned}\right.$$

$$(42\,bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_2 \delta^2\rho_2\, dv_2 + 2\int_{S_2} \delta\rho_2\varepsilon_2\, dS_2 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_2\varepsilon_2\, dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_2\, dS_2\\
&\quad + \int_{S_{12}}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_2}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_2}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_2\, dS_{12}\\
&\quad + \int_{S_2}\rho_2\,\mathrm{D}(\varepsilon_2\, dS_2) + \int_{S_{12}}\rho_2\,\mathrm{D}(\varepsilon_2\, dS_{12}) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Considérons maintenant l'expression de $\delta^2\Phi$. Par un groupement convenable des termes qui la composent, elle peut s'écrire

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 + \int_1\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\delta^2\rho_1\, dv_1\\
&+ \int_{S_1}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\left(2\,\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_1\\
&+ \int_{S_{12}}\left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \mathrm{V}\right]\left(2\,\delta\rho_1 + \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\rho_1}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\rho_1}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_{12}\\
&+ \int_{S_1}[\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1 + \mathrm{P}_0]\,\mathrm{D}(\varepsilon_1\, dS_1)\\
&+ \int_{S_{12}}[\varphi_1(\rho_1) + \mathrm{V}\rho_1]\,\mathrm{D}(\varepsilon_1\, dS_{12})\\
&+ \int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_1\\
&+ \int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial\mathrm{V}}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_{12} + \ldots,
\end{aligned}\right.$$

le signe : ... désignant des termes de même forme que ceux qui sont écrits, mais où l'indice 2 remplace l'indice 1.

En vertu des égalités (34), (38), (38 *bis*), (39), (39 *bis*) et (40), l'égalité (43) peut s'écrire

$$
(44)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 \\
&+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\
&+\int_{S_{12}}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\
&+C_1\Bigg[\int_1\delta^2\rho_1\,dv_1 \\
&\qquad+\int_{S_1}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\
&\qquad+\int_{S_{12}}\left(2\,\delta\rho_1+\frac{\partial\rho_1}{\partial x}Dx+\frac{\partial\rho_1}{\partial y}Dy+\frac{\partial\rho_1}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12} \\
&\qquad\qquad+\int_{S_1}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_1)+\int_{S_{12}}\rho_1\,D(\varepsilon_1\,dS_{12})\Bigg]+\ldots.
\end{aligned}
\right.
$$

En chaque point de la surface S_{12} on peut attribuer à Dx, Dy, Dz la même valeur dans l'expression

$$\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12},$$

et dans l'expression

$$\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_{12}.$$

Dès lors, en vertu des égalités (34), (42) et (42 *bis*), l'égalité (44) devient

$$
(45)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\
&+\int_{S_1}\rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_1 \\
&+\int_{S_2}\rho_2\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_2\,dS_2 \\
&+\int_{S_{12}}(\rho_1-\rho_2)\left(\frac{\partial V}{\partial x}Dx+\frac{\partial V}{\partial y}Dy+\frac{\partial V}{\partial z}Dz\right)\varepsilon_1\,dS_{12}.
\end{aligned}
\right.
$$

Telle est la forme très simple que prend la *variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système composé de deux fluides, soumis à une pression constante, dans le cas où l'état initial est un état d'équilibre.*

§ V. — *Stabilité de l'équilibre d'un fluide dont les masses élémentaires ne sont sollicitées par aucune force.*

Imaginons tout d'abord que les divers éléments de masse qui composent le système ne soient soumis à aucune force extérieure; la seule force extérieure qui agisse sur le système est la pression P_0, appliquée à la surface libre.

Dans ce cas, la fonction V se réduit à une constante: l'égalité (38) nous apprend alors que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du fluide 1 et l'égalité (41) nous enseigne qu'il en est de même de la pression Π_1; les égalités (38 *bis*) et (41 *bis*) entraînent également la constance des quantités ρ_2 et Π_2 à l'intérieur du fluide 2; *chacun des fluides que renferme le système en équilibre est homogène.*

La constance de la fonction V entraîne, en tout point du système, les égalités

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

en sorte que l'égalité (45) se réduit à

$$\delta^2\Phi = \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2.$$

Si l'on remarque que ρ_1 a la même valeur en tout point du fluide 1 et ρ_2 la même valeur en tout point du fluide 2, cette égalité peut encore s'écrire

$$(46) \qquad \delta^2\Phi = \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int_1 (\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\int_2 (\delta\rho_2)^2\,dv_2.$$

Il est des modifications pour lesquelles cette quantité $\delta^2\Phi$ est évidemment égale à 0; ce sont celles dans lesquelles chaque particule

fluide qui se déplace est remplacée par une particule fluide de même densité; pour de semblables modifications, non seulement $\delta^2\Phi$ est égal à 0, mais il en est de même de toutes les variations d'ordre supérieur de Φ, en sorte que, pour de semblables modifications, l'équilibre du système doit être regardé comme indifférent; cette proposition est une conséquence immédiate et évidente de la définition du mot *fluide*.

Excluons ces modifications particulières et cherchons à quelles conditions l'équilibre du système sera stable pour toutes les autres modifications; la condition cherchée s'obtiendra en exprimant que, pour toutes ces modifications, la quantité $\delta^2\Phi$ est positive, ce qui donnera, en vertu de l'égalité (46).

$$(47)\qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\int_1(\delta\rho_1)^2\,dv_1+\frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\int_2(\delta\rho_2)^2\,dv_2>0.$$

Les variations $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ sont seulement assujetties aux conditions (36), qui les laissent entièrement arbitraires. La condition (47) équivaut donc aux deux conditions

$$(48)\qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}>0,\qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}>0.$$

Telles sont les conditions qui expriment que le système est en équilibre stable sous l'action d'une pression uniforme et constante.

Nous admettrons que l'équilibre d'un système fluide, soumis uniquement à l'action d'une pression uniforme et constante, est toujours un équilibre stable; *nous admettrons,* par conséquent, *que les inégalités* (48) *sont toujours vérifiées par tous les fluides.*

Interprétons ces inégalités.

La densité ρ_1 que prend le fluide 1 soumis exclusivement à une pression uniforme P_0 est donnée par l'égalité (3), où Π_1 prend la valeur P_0, c'est-à-dire par l'égalité

$$(49)\qquad \varphi_1(\rho_1)-\rho_1\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}+P_0=0.$$

Sous la pression uniforme (P_0+dP_0), à la même température, le

fluide 1 prend une densité $(\rho_1 + d\rho_1)$; l'équation qui lie $d\rho_1$ à dP_0, obtenue en différentiant l'égalité (49), est

$$\rho_1 \frac{d^2 \varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} d\rho_1 = dP_0.$$

La première inégalité (48) nous apprend donc simplement que $d\rho_1$ est de même signe que dP_0. Ainsi, *l'hypothèse que nous avons admise revient à supposer que, dans tout fluide soumis exclusivement à une pression uniforme, un accroissement de cette pression détermine un accroissement de la densité.*

§ VI. — *Stabilité de l'équilibre d'un système fluide terminé par des surfaces libres.*

Revenons au cas général auquel se rapporte l'égalité (45).

Nous avons vu que, dans ce cas, chacune des surfaces S_1, S_2, S_{12} était une surface de niveau.

De ce fait que la surface S_1 est une surface de niveau, il résulte que l'on peut, en désignant par n_i la normale à la surface S_1, dirigée vers l'intérieur du fluide 1, écrire

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, x),$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, y),$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n_i} \cos(n_i, z).$$

On a donc

$$\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz$$
$$= \frac{\partial V}{\partial n_i} [\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Mais, d'autre part, on a évidemment

$$\varepsilon_1 = -[\cos(n_i, x) Dx + \cos(n_i, y) Dy + \cos(n_i, z) Dz].$$

Par conséquent, on a

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{D}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{D}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1 = -\frac{\partial V}{\partial n_i}\,\varepsilon_1^2.$$

Cette remarque et deux autres remarques analogues permettent de transformer l'égalité (45) en

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2\Phi = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &- \int_{S_1} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i}\,\varepsilon_1^2\,dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial n_i}\,\varepsilon_2^2\,dS_2 \\ &- \int_{S_{12}} (\rho_2 - \rho_1)\,\frac{\partial V}{\partial n_2}\,\varepsilon_1^2\,dS_{12}, \end{aligned}\right.$$

n_2 étant la normale à la surface S_{12} vers l'intérieur du fluide 2.

Il existe évidemment des modifications du système dans lesquelles cette variation est égale à 0 : ce sont celles où le liquide se meut de telle manière que chacune des trois surfaces S_1, S_2, S_{12} demeure invariable et que chaque particule fluide déplacée soit remplacée par une particule de même densité. De pareilles modifications annulent non seulement $\delta^2\Phi$, mais encore toutes les variations d'ordre supérieur de Φ; on doit regarder l'équilibre du système comme indifférent à de semblables modifications; en fait, elles ne font varier aucun des paramètres qui, par hypothèse, suffisent à déterminer l'état du système.

Laissons de côté ces modifications particulières et cherchons la condition de stabilité du système pour toutes les autres modifications; cette condition s'obtiendra en exprimant que la quantité $\delta^2\Phi$ est positive pour toutes ces modifications; elle s'écrira, en vertu de l'égalité (50),

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ &- \int_{S_1} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i}\,\varepsilon_1^2\,dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial n_i}\,\varepsilon_2^2\,dS_2 \\ &\qquad - \int_{S_{12}} (\rho_2 - \rho_1)\,\frac{\partial V}{\partial n_2}\,\varepsilon_1^2\,dS_{12} > 0. \end{aligned}\right.$$

Si nous admettons l'exactitude de l'hypothèse énoncée au paragraphe précédent, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour que l'équilibre d'un système de fluides terminés par des surfaces libres soit un équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait :

1° *En tout point des surfaces libres* S_1, S_2,

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0; \tag{52}$$

2° *En tout point de la surface de contact* S_{12} *de deux fluides* 1 *et* 2,

$$(\rho_2 - \rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2} \leqq 0. \tag{53}$$

Dans ces deux conditions, l'égalité n'a jamais lieu pour tous les points d'une région d'étendue finie de la surface.

Que ces conditions suffisent à assurer l'inégalité (51), cela est bien évident; mais qu'elles soient nécessaires pour que cette égalité soit vérifiée, cela s'aperçoit moins aisément, car les quantités $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$, ε_1, ε_2 ne sont pas arbitraires, mais soumises aux conditions (36): une démonstration est donc ici nécessaire; démontrons, par exemple, qu'en tout point de la surface S_1, on a nécessairement

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} \leqq 0, \tag{52 bis}$$

l'égalité n'ayant pas lieu en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface S_1; la nécessité des deux autres conditions s'établirait d'une manière analogue.

La condition (52 *bis*) ne peut être en défaut que de deux manières; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est égal à 0 en tous les points d'un domaine d'étendue finie tracé sur la surface S_1; ou bien $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif au moins en un point de la surface S_1; dans ce dernier cas, on pourrait, autour du

point où $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ est positif, tracer un domaine d'étendue finie où, par raison de continuité, $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait également positif; donc, si la condition (52 *bis*) était en défaut, on pourrait assurément tracer, sur la surface S_1, un domaine D, d'étendue finie, en tout point duquel la quantité $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ serait nulle ou positive.

Cela posé, imaginons qu'on laisse immobiles le fluide 2 et les surfaces S_2, S_{12} qui le limitent; qu'on laisse également invariable la partie de la surface S_1 qui est extérieure au domaine D; qu'on déplace le fluide 1 de telle manière que le liquide qui remplissait un élément de volume fixe dans l'espace soit remplacé par un liquide de même densité; que l'on donne enfin, aux divers points du domaine D, des déplacements tels que

$$\int_D \varepsilon_1 \, dS_1 = 0.$$

Si l'on observe que la densité ρ_1 a la même valeur en tous les points du domaine D, qui appartient à une surface libre et partant à une surface de niveau, on verra sans peine que les égalités (36) sont vérifiées et, par conséquent, que la modification considérée est une modification virtuelle du système.

Or, pour une semblable modification, le premier membre de l'inégalité (51) se réduit à

$$-\int_D \rho_1 \frac{\partial V}{\partial n_i} \varepsilon_1^2 \, dS_1,$$

et, contrairement à l'inégalité (51), ce premier membre serait nul ou négatif si la condition (52 *bis*) n'était pas vérifiée. Cette condition (52 *bis*) est donc nécessairement vérifiée.

Maintenant que nous avons, en (52) et (53), les conditions générales de la stabilité de l'équilibre, cherchons à interpréter ces conditions.

La surface libre S_1 est une surface de niveau; la force (X, Y, Z) en un point de cette surface est normale à cette surface; pour que $\frac{\partial V}{\partial n_i}$ soit négatif, il faut et il suffit que la force soit dirigée vers l'intérieur

du fluide 1; la condition (52) peut donc s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur une surface libre; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide.

De même, la condition (53) peut s'énoncer ainsi :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une région d'étendue finie prise sur la surface de contact de deux fluides; en tout point d'une telle surface où elle n'est pas nulle, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.

CHAPITRE II.

L'ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

§ I. — *Théorèmes généraux sur l'équilibre des corps flottants.*

Imaginons un système formé de deux fluides 1 et 2, et d'un solide 3. Ce dernier sera supposé absolument invariable de forme et d'état. Nous supposerons le solide en contact avec le fluide 1 par une partie S_{13} de sa surface, et avec le fluide 2 par une autre partie S_{23} de sa surface. Le fluide sera soumis à deux sortes de forces extérieures : des forces appliquées à ses divers éléments de masse, et des pressions appliquées aux divers éléments de la surface qui le limite; au sujet de ces forces, nous admettrons les mêmes hypothèses, nous emploierons les mêmes notations qu'au Chapitre précédent; quant au corps solide, nous le supposerons soumis à des forces que nous réduirons à une force et à un couple; ξ, η, ζ seront les composantes de la force résultante suivant les trois axes de coordonnées et λ, μ, ν les composantes de l'axe du couple suivant les trois mêmes axes.

L'état du solide étant supposé rigoureusement invariable, la présence

de ce corps introduit seulement, dans le potentiel thermodynamique interne, un terme constant que l'on peut négliger d'écrire ; le potentiel thermodynamique interne sera donc encore donné par l'égalité (1) du Chapitre I.

Les conditions d'équilibre d'un pareil système, s'obtiendront en écrivant que, pour toute modification virtuelle du système, on a

$$\delta\mathfrak{F} - d\mathfrak{T}_e \geqq 0, \tag{1}$$

$\delta\mathfrak{F}$ étant la variation du potentiel thermodynamique interne dans la modification considérée et $d\mathfrak{T}_e$ le travail des forces extérieures.

Désignons par δx, δy, δz les composantes du déplacement imposé à un point matériel de l'un des deux fluides ; par δf, δg, δh les trois translations suivant Ox, Oy, Oz et par δl, δm, δn les trois rotations autour de ces mêmes axes ; le travail des forces extérieures appliquées au système aura pour expression

$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{T}_e = & \int_{S_1}[P\cos(P,x)\,\delta x + P\cos(P,y)\,\delta y + P\cos(P,z)\,\delta z]\,dS_1 \\ & + \int_{S_2}[P\cos(P,x)\,\delta x + P\cos(P,y)\,\delta y + P\cos(P,z)\,\delta z]\,dS_2 \\ & + \int_1 \rho_1(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dv_1 \\ & + \int_2 \rho_2(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dv_2 \\ & + \xi\,\delta f + \eta\,\delta g + \zeta\,\delta h + \lambda\,\delta l + \mu\,\delta m + \nu\,\delta n. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

D'autre part, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{F} = & \int_{S_1}\varphi_1(\rho_1)\,\varepsilon_1\,dS_1 + \int_{S_2}\varphi_2(\rho_2)\,\varepsilon_2\,dS_2 \\ & + \int_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\,\delta\rho_1\,dv_1 + \int_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2}\,\delta\rho_2\,dv_2. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces égalités (2) et (3) permettent de donner une forme explicite à l'égalité (1).

On peut supposer, en premier lieu, que le corps solide demeure im-

mobile et que, seul, le fluide éprouve un déplacement virtuel. La considération de tels déplacements virtuels redonnera toutes les conditions énumérées au Chapitre I, § I.

En vertu de ces conditions, les inégalités et égalités (1), (2) et (3) donnent, pour toute transformation où le fluide ne se creuse pas de cavité,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi\delta f + \eta\delta g + \zeta\delta h + \lambda\delta l + \mu\delta m + \nu\delta n \\ &\quad - \int_{S_{13}} \Pi_1 \Big[\cos(N,x)\delta x + \cos(N,y)\delta y + \cos(N,z)\delta z\Big] dS_{13}, \\ &\quad - \int_{S_{23}} \Pi_2 \Big[\cos(N,x)\delta x + \cos(N,y)\delta y + \cos(N,z)\delta z\Big] dS_{23} \geq 0, \end{aligned}\right.$$

N étant la normale au point (x, y, z) de la surface du corps solide, dirigée vers l'extérieur de ce corps. D'ailleurs, comme toute modification où le fluide ne se creuse pas de cavité est une modification renversable, le signe d'inégalité peut être effacé.

Le fluide demeurant en contact avec le corps solide durant la modification considérée, si l'on désigne par Δx, Δy, Δz les composantes du déplacement du point matériel *appartenant au corps solide*, dont les coordonnées sont x, y, z, à l'instant t, on a, en tout point des surfaces S_{13} et S_{23},

$$\begin{aligned} &\cos(N,x)\,\delta x + \cos(N,y)\,\delta y + \cos(N,z)\,\delta z \\ &= \cos(N,x)\Delta x + \cos(N,y)\Delta y + \cos(N,z)\Delta z. \end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta f + z\delta m - y\delta n, \\ \Delta y &= \delta g + x\delta n - z\delta l, \\ \Delta z &= \delta h + y\delta l - x\delta m, \end{aligned}\right.$$

L'égalité (4) devient donc

$$
(6)\quad
\begin{cases}
\left[\xi - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23}\right] \delta f \\
+ \left[\eta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, y)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, y)\, dS_{23}\right] \delta g \\
+ \left[\zeta - \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, z)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, z)\, dS_{23}\right] \delta h \\
+ \left\{\lambda - \int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13}\right. \\
\qquad \left. - \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23}\right\} \delta l \\
+ \left\{\mu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13}\right. \\
\qquad \left. - \int_{S_{23}} \Pi_2 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{23}\right\} \delta m \\
+ \left\{\nu - \int_{S_{13}} \Pi_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13}\right. \\
\qquad \left. - \int_{S_{23}} \Pi_2 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{23}\right\} \delta n = 0.
\end{cases}
$$

Cette égalité doit avoir lieu quels que soient δf, δg, δh, δl, δm, δn, en sorte que nous trouvons les conditions

$$
(7)\quad
\begin{cases}
\xi = \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \\
\eta = \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, y)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, y)\, dS_{23}, \\
\zeta = \int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, z)\, dS_{23}, \\
\lambda = \int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
\qquad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23}.
\end{cases}
$$

$$(7)\quad \begin{cases} \mu = \displaystyle\int_{S_{13}} \Pi_1 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{13} \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{23}} \Pi_2 [z\cos(N,x) - x\cos(N,z)]\, dS_{23}. \\ \nu = \displaystyle\int_{S_{13}} \Pi_1 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{13} \\ \qquad + \displaystyle\int_{S_{23}} \Pi_2 [x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\, dS_{23}. \end{cases}$$

Telles sont les conditions qui, jointes aux équations de l'Hydrostatique, donnent les conditions d'équilibre d'un système de fluides qui porte un flotteur.

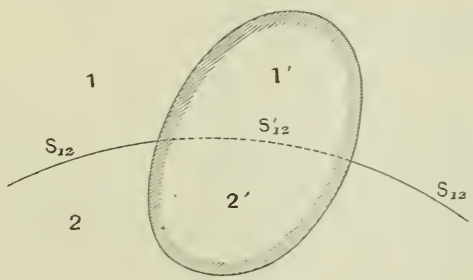
Ce que nous venons de dire est général.

Imaginons maintenant que les forces extérieures admettent une fonction potentielle V; que cette fonction soit uniforme, finie et continue en tous les points d'un espace renfermant non seulement les fluides, mais le corps solide.

La surface de séparation S_{12} des fluides 1 et 2 est une surface de niveau; la fonction V prend, en tous les points de cette surface, une même valeur A.

Le lieu des points, intérieurs au corps 3, où la fonction V prend la valeur A, forme une surface S'_{12}, connexe avec la surface S_{12} (*fig.* 2).

Fig. 2.



Cette surface S'_{12} sépare le corps 3 en deux régions; l'une, contiguë au fluide 1, que nous désignerons par 1'; l'autre, contiguë au fluide 2, que nous désignerons par 2'.

A l'intérieur du fluide 1, la densité ρ_1 et la pression Π_1 sont des

fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_1 = R_1(V), \tag{8}$$

$$\Pi_1 = P_1(V); \tag{9}$$

ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_1\, dV + d\Pi_1 = 0. \tag{10}$$

En chaque point de l'espace 1′, nous définirons les fonctions ρ_1 et Π_1 par les équations (8) et (9). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 1′, l'égalité (10), qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = 0, \\ &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} = 0, \\ &\rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

De même, à l'intérieur du fluide 2, la densité ρ_2 et la pression Π_2 sont deux fonctions bien déterminées de V :

$$\rho_2 = R_2(V), \tag{8 bis}$$

$$\Pi_2 = P_2(V). \tag{9 bis}$$

Ces fonctions sont telles que l'on ait

$$\rho_2\, dV_2 + d\Pi_2 = 0. \tag{10 bis}$$

En chaque point de l'espace 2′, nous définirons les fonctions ρ_2 et Π_2 par les équations (8 *bis*) et (9 *bis*). Nous aurons donc encore, en tout point de l'espace 2′, l'égalité (10 *bis*), qui peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} &\rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = 0, \\ &\rho_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = 0, \\ &\rho_2 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11 bis}$$

Cela posé, on trouvera sans peine que l'on a

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{S_{13}} \Pi_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \int_{S_{23}} \Pi_2 \cos(N, x)\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} dv_3 + \int_{2'} \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\int_{S_{13}} \Pi_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
&\quad + \int_{S_{23}} \Pi_2 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23} \\
&\quad = \int_{1'} \left(y \frac{\partial \Pi_1}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_1}{\partial y} \right) dv_3 + \int_{2'} \left(y \frac{\partial \Pi_2}{\partial z} - z \frac{\partial \Pi_2}{\partial y} \right) dv_3 \\
&\quad = -\int_{1'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} y - \frac{\partial V}{\partial y} z \right) dv_3, \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu des égalités (12), les égalités (7) prennent la forme suivante :

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi = -\int_{1'} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} dv_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&\lambda = -\int_{1'} \rho_1 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3 - \int_{2'} \rho_2 \left(y \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial y} \right) dv_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités peuvent s'interpréter.

Remplissons l'espace occupé par le corps solide par un fluide fictif ayant pour densité ρ_1 en tout point de l'espace 1′ et ρ_2 en tout point de l'espace 2′. Considérons les forces extérieures qui agissent sur les divers éléments de masse de ce fluide, et *composons-les comme s'il s'agissait d'un corps solide;* soient ξ', η', ζ' les composantes de la force résultante et λ', μ', ν' les composantes de l'axe du couple résul-

tant; on voit sans peine que l'on a

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi - \xi' &= 0, \\ \eta - \eta' &= 0, \\ \zeta - \zeta' &= 0, \\ \lambda - \lambda' &= 0, \\ \mu - \mu' &= 0, \\ \nu - \nu' &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités sont une généralisation du principe d'Archimède.

§ II. — *Potentiel thermodynamique d'un système qui renferme un flotteur. Variation première de ce potentiel.*

Considérons un système formé de deux fluides et d'un flotteur en contact avec ces deux fluides. Le potentiel thermodynamique interne de ce système pourra s'écrire [Chapitre I, égalité (1)]

$$(15)\qquad \bar{\pi} = \int_1 \varphi_1(\rho_1)\, dv_1 + \int_2 \varphi_2(\rho_2)\, dv_2,$$

la présence du corps solide introduisant seulement dans ce potentiel un terme constant qu'il est inutile d'écrire.

Nous supposerons le système limité par une surface invariable, en sorte que les pressions qui peuvent agir aux divers points de cette surface n'effectueront aucun travail. Pour calculer le potentiel des forces extérieures, il suffira de tenir compte des forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides et du corps solide.

Les forces appliquées aux divers éléments de masse des corps fluides admettent un potentiel qui a pour valeur

$$(16)\qquad \Omega = \int_1 V \rho_1\, dv_1 + \int_2 V \rho_2\, dv_2.$$

Nous supposerons que chaque masse élémentaire $dm_3 = \rho_3\, dv_3$ du

corps solide soit soumise à une force dont les composantes ont pour valeur

$$-\rho_3 \frac{\partial U}{\partial x} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial y} dv_3, \quad -\rho_3 \frac{\partial U}{\partial z} dv_3,$$

U étant une fonction potentielle, qui est uniforme, finie et continue en tous les points d'un domaine à l'intérieur duquel se trouve le corps solide.

Les forces extérieures auxquelles le corps solide est soumis admettront alors un potentiel qui aura pour valeur

$$\Omega' = \int_{v_3} \rho U_3 \, dv_3 \tag{17}$$

et le système admettra un potentiel thermodynamique total ayant pour valeur

$$\Phi = \mathcal{F} + \Omega + \Omega'. \tag{18}$$

La variation première de ce potentiel aura pour valeur

$$\delta\Phi = \delta(\mathcal{F} + \Omega) + \delta\Omega'. \tag{19}$$

Si l'on se reporte à l'expression de $(\mathcal{F} + \Omega)$, donnée par les égalités (15) et (16), on voit que cette expression se rapproche du potentiel thermodynamique total d'un système ne renfermant pas de flotteur, potentiel dont nous avons calculé la variation première au Chapitre I [égalité (26)]. Seulement les parties déformables de la surface qui limite le fluide se nomment ici S_{13}, S_{23}, au lieu de se nommer S_1, S_2; de plus, les termes en P_0 font défaut. On aura donc

$$\left\{\begin{aligned} \delta(\mathcal{F} + \Omega) = & \int_{v_1} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1 \, dv_1 + \int_{v_2} \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V\right] \delta\rho_2 \, dv_2 \\ & + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] \varepsilon_1 \, dS_{13} + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2] \varepsilon_2 \, dS_{23} \\ & + \int_{S_{12}} \{[\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] \varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2] \varepsilon_2\} \, dS_{12}. \end{aligned}\right. \tag{23}$$

D'autre part, on a

$$(21)\qquad \delta\Omega' = \int_3 \rho_3 \left(\frac{\partial U}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\,\Delta z \right) dv_3.$$

Δx, Δy, Δz étant donnés par les égalités (5), cette dernière égalité devient

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} \delta\Omega' = {} & \delta f \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\, dv_3 + \delta g \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial y}\, dv_3 + \delta h \int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial z}\, dv_3 \\ & + \delta l \int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3 + \delta m \int_3 \rho_3 \left(z \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3 \\ & + \delta n \int_3 \rho_3 \left(x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (19), (20), (21), (22) font connaître la variation première du potentiel thermodynamique.

Nous allons en faire usage pour retrouver les conditions d'équilibre d'un système fluide portant un flotteur sous une forme qui nous sera utile par la suite.

Ces conditions s'expriment en écrivant que l'on a, pour toute déformation virtuelle,

$$(23)\qquad \delta\Phi = 0.$$

Si l'on observe que l'on a, en tout point de la surface S_{13},

$$\varepsilon_1 = -[\Delta x \cos(N, x) + \Delta y \cos(N, y) + \Delta z \cos(N, z)];$$

qu'en tout point de la surface S_{23} ε_2 s'exprime d'une manière analogue; on voit sans peine que les égalités (5), (19), (20) et (22) transforment l'égalité (23) en

$$(24)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V \right] \delta\rho_1\, dv_1 + \int_2 \left[\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V \right] \delta\rho\, dv_2 \\ & + \int_{S_{12}} \{ [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\,\varepsilon_1 + [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\,\varepsilon_2 \}\, dS_{12} \end{aligned} \right.$$

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+\delta f\Big\{\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\,dv_3 - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1]\cos(N, x)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2]\cos(N, x)\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta g\{\ldots\} + \delta h\{\ldots\} \\
&+\delta l\Big\{\int_3 \rho_3\Big(y\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y}\Big)dv_3 \\
&\qquad - \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1][y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,dS_{13} \\
&\qquad - \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + V\rho_2][y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,dS_{23}\Big\} \\
&+\delta m\{\ldots\} + \delta n\{\ldots\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette égalité (24) ne doit pas avoir lieu identiquement; elle doit avoir lieu seulement pour les modifications virtuelles qui laissent invariable la masse de chacun des fluides 1 et 2.

Exprimons que la masse du corps I demeure invariable; nous trouvons

$$\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{13} = 0$$

ou encore

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_1 \delta\rho_1\,dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1\varepsilon_1\,dS_{12} \\
&\quad - \delta f\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N, x)\,dS_{13} - \delta g\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N, y)\,dS_{13} \\
&\qquad\qquad - \delta h\int_{S_{13}} \rho_1\cos(N, z)\,dS_{13} \\
&\quad - \delta l\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta m\int_{S_{13}} \rho_1[z\cos(N, x) - x\cos(N, z)]\,dS_{13} \\
&\quad - \delta n\int_{S_{13}} \rho_1[x\cos(N, y) - y\cos(N, x)]\,dS_{13} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Le fluide 2 fournit une égalité analogue, que nous désignerons par (25 *bis*).

L'égalité (24) doit avoir lieu toutes les fois que les égalités (25) et (25 *bis*) sont vérifiées, et seulement dans ce cas. Le calcul des variations nous enseigne qu'il existe alors deux constantes C_1, C_2, telles qu'en ajoutant au premier membre de l'égalité (24) le produit par C_1 du premier membre de l'égalité (25) et le produit par C_2 du premier membre de l'égalité (25 *bis*), on obtienne une quantité identiquement nulle.

Si l'on observe alors que l'on a, en tout point de la surface S_{12}, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$, on trouve les conditions suivantes :

1° *On a, en tout point du fluide* 1,

$$\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0 \tag{26}$$

et, en tout point du fluide 2,

$$\frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + V + C_2 = 0. \tag{26 bis}$$

2° *On a, en tout point de la surface* S_{12},

$$\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = \varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2. \tag{27}$$

3° *On a, enfin,*

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_3 \rho_3 \frac{\partial U}{\partial x}\, dv_3 = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1] \cos(N, x)\, dS_{13} \\
&\qquad\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2] \cos(N, x)\, dS_{23}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\int_3 \rho_3 \left(y \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3 \\
&\quad = \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1][y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\
&\qquad + \int_{S_{23}} [\varphi_2(\rho_2) + (V + C_2)\rho_2][y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{23}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right. \tag{28}$$

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un système de deux fluides portant un flotteur; on prouverait aisément qu'elles sont équivalentes aux conditions établies au § I.

CHAPITRE III.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE D'UN FLOTTEUR.

§ I. — *Variation seconde du potentiel thermodynamique d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Considérons un système de deux fluides, 1 et 2, contenant un flotteur; concevons que ce système soit soumis aux hypothèses indiquées au § 2 du Chapitre II; ce système admet un potentiel thermodynamique Φ, défini par les égalités (15), (16), (17), (18) du Chapitre II; la variation première $\delta\Phi$ de ce potentiel est donnée par les égalités (19), (20), (21), (22) du même Chapitre; proposons-nous de déterminer la forme générale de la variation seconde $\delta^2\Phi$.

Nous aurons

$$\delta^2\Phi = \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) + \delta^2\Omega'. \tag{1}$$

En raisonnant sur l'expression de $\delta(\mathcal{F} + \Omega)$ [Chapitre II, égalité (20)] comme au Chapitre I, § 3, nous avons raisonné sur l'expression de $\delta\Phi$, nous trouverons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = {} & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2 dv_1 + \int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta^2\rho_1 dv_1 \\
& - 2\int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_{12} + 2\int_{S_{23}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} - V\right]\delta\rho_1\varepsilon_1 dS_1 \\
& + \int_{S_{12}} \left\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right] Dx \right. \\
& \qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right] Dy \\
& \qquad \left. + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right] Dz \right\} \varepsilon_1 dS_{12} \\
& + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_1)
\end{aligned}\right.$$

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&+ \int_{S_{13}} \Big\{ \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial x} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial x}\right] Dx \\
&\qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial y} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial y}\right] Dy \\
&\qquad + \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1}\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + V\frac{\partial\rho_1}{\partial z} + \rho_1\frac{\partial V}{\partial z}\right] Dz \Big\} \varepsilon_1 dS_{13} \\
&+ \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}) \\
&+ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

le symbole : etc. représentant des termes qui sont analogues à ceux que nous avons écrits et qui se déduisent de ceux-là en permutant les indices 1 et 2.

Les égalités [Chapitre II, égalités (26) et (27)]

$$
(3)\qquad \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V + C_1 = 0 \qquad \text{(en tout point du fluide 1)},
$$

$$
(4)\qquad \varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1 = 0 \qquad \text{(en tout point de la surface } S_{12})
$$

permettent d'écrire

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_1 \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta^2\rho_1 dv_1 \\
&\quad + 2\int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1 \varepsilon_1 dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \delta\rho_1 \varepsilon_1 dS_{13} \\
&\quad + \int_{S_{12}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{12} \\
&\quad + \int_{S_{12}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{12}) \\
&\quad + \int_{S_{13}} \left[\frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + V\right] \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{13} \\
&\quad + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}) \\
&= -C_1 \Big\{ \int_1 \delta^2\rho_1 dv_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1 \varepsilon_1 dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \delta\rho_1 \varepsilon_1 dS_{13} \\
&\qquad + \int_{S_{12}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{12} + \int_{S_{12}} \rho_1 D(\varepsilon_1 dS_{12}) \\
&\qquad + \int_{S_{13}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1 dS_{13} \Big\} \\
&\quad + \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + V\rho_1] D(\varepsilon_1 dS_{13}).
\end{aligned}
\right.
$$

En exprimant que la masse du fluide 1 est essentiellement invariable, nous trouvons l'identité

$$(6)\qquad \int_1 \delta\rho_1\, dv_1 + \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} = 0.$$

Le premier membre de cette égalité (6) étant identiquement nul, il en doit être de même de sa variation, ce qui nous donne l'égalité

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta^2\rho_1\, dv_1 + 2\int_{S_{12}} \delta\rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} + 2\int_{S_{13}} \delta\rho_1 \varepsilon_1\, dS_{13} \\ &\quad + \int_{S_{12}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{12} + \int_{S_{12}} \rho_1 D(\varepsilon_1\, dS_{12}) \\ &\quad + \int_{S_{13}} \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x} Dx + \frac{\partial\rho_1}{\partial y} Dy + \frac{\partial\rho_1}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{13} + \int_{S_{13}} \rho_1 D(\varepsilon_1\, dS_{13}) = 0. \end{aligned}\right.$$

Moyennant cette égalité (7), le second membre de l'égalité (5) se réduit à

$$\int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1]\, D(\varepsilon_1\, dS_{13}).$$

Ce calcul, et un calcul semblable effectué sur le fluide 2, donnent à l'égalité (2) la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F} + \Omega) = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} (\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ &+ \int_{S_{12}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{12} \\ &+ \int_{S_{13}} \rho_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x} Dx + \frac{\partial V}{\partial y} Dy + \frac{\partial V}{\partial z} Dz\right) \varepsilon_1\, dS_{13} \\ &+ \int_{S_{13}} [\varphi_1(\rho_1) + (V + C_1)\rho_1]\, D(\varepsilon_1\, dS_{13}) + \text{etc.}. \end{aligned}\right.$$

le symbole : etc. ayant un sens analogue à celui qu'il a dans l'égalité (2).

Nous pouvons, en tous les points de la surface S_{13}, prendre

$$(9)\qquad Dx = \Delta x, \qquad Dy = \Delta y, \qquad Dz = \Delta z,$$

Δx, Δy, Δz étant les composantes du déplacement du point du corps solide dont les coordonnées initiales sont x, y, z, et étant donnés, par

conséquent, par les égalités

$$(10)\qquad \begin{cases} \Delta x = \delta f + z\,\delta m - y\,\delta n, \\ \Delta y = \delta g + x\,\delta n - z\,\delta l, \\ \Delta z = \delta h + y\,\delta l - x\,\delta m. \end{cases}$$

Nous aurons alors

$$\varepsilon_1 = -\left[\cos(N, x)\,\Delta x + \cos(N, y)\,\Delta y + \cos(N, z)\,\Delta z\right]$$

ou bien, en vertu des égalités (10),

$$(11)\qquad \begin{aligned} \varepsilon_1 = -\{ &\cos(N, x)\,\delta f + \cos(N, y)\,\delta g + \cos(N, z)\,\delta h \\ &+ [y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\,\delta l \\ &+ [z\cos(N, x) - x\cos(N, z)]\,\delta m \\ &+ [x\cos(N, y) - y\cos(N, x)]\,\delta n \}. \end{aligned}$$

Si nous convenons de prendre δf, δg, δh, δl, δm, δn *comme variations indépendantes,* nous aurons, en vertu de l'égalité (11),

$$(12)\qquad \begin{aligned} \Delta\varepsilon_1 = &-\delta f\,\Delta\cos(N, x) - \delta g\,\Delta\cos(N, y) - \delta h\,\Delta\cos(N, z) \\ &- \delta l\,[y\,\Delta\cos(N, z) - z\,\Delta\cos(N, y)] \\ &- \delta l\,[\cos(N, z)\,\Delta y - \cos(N, y)\,\Delta z] \\ &- \delta m\,[z\,\Delta\cos(N, x) - x\,\Delta\cos(N, z)] \\ &- \delta m\,[\cos(N, x)\,\Delta z - \cos(N, z)\,\Delta x] \\ &- \delta n\,[x\,\Delta\cos(N, y) - y\,\Delta\cos(N, x)] \\ &- \delta n\,[\cos(N, y)\,\Delta x - \cos(N, x)\,\Delta y]. \end{aligned}$$

Mais on a également

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta\cos(N, x) = \cos(N, z)\,\delta m - \cos(N, y)\,\delta n, \\ \Delta\cos(N, y) = \cos(N, x)\,\delta n - \cos(N, z)\,\delta l, \\ \Delta\cos(N, z) = \cos(N, y)\,\delta l - \cos(N, x)\,\delta m. \end{cases}$$

En vertu des égalités (10) et (13), l'égalité (12) devient

$$(14)\qquad \Delta\varepsilon_1 = 0.$$

D'ailleurs, l'élément dS_{13} est un élément d'aire invariable de la surface du solide, en sorte que

$$\Delta\, dS_{13} = 0. \tag{15}$$

En vertu des égalités (14) et (15), l'égalité (8) devient

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F}+\Omega) = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\, dv_1 \\ & + \int_{S_{12}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{D}x + \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{D}y + \frac{\partial V}{\partial z}\mathrm{D}z\right)\varepsilon_1\, dS_{12} \\ & + \int_{S_{13}} \rho_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right)\varepsilon_1\, dS_{13} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Calculons maintenant $\delta^2\Omega'$.

Nous avons

$$\Omega' = \int_3 \rho_3 \mathrm{U}\, dv_3.$$

$$\delta\Omega' = \int_3 \rho_3\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\Delta z\right) dv_3.$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta^2\Omega' = & \int_3 \rho_3\left[\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2}(\Delta z)^2\right. \\ & \left. + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y\,\partial z}\Delta y\,\Delta z + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z\,\partial x}\Delta z\,\Delta x + 2\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\right] dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\left(\frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y\right) dv_3 \\ & + \int_3 \rho_3 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\left(\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z\right) dv_3. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les égalités (10) donnent

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Delta x}{\partial y} = -\delta n, \qquad \frac{\partial \Delta x}{\partial z} = \delta m,$$

$$\Delta^2 x = 0,$$

ce qui donne la première des égalités

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Delta x}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta x}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta x}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 x = (\Delta z\,\delta m - \Delta y\,\delta n),\\
&\frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta y}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta y}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 y = (\Delta x\,\delta n - \Delta z\,\delta l),\\
&\frac{\partial \Delta z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \Delta z}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \Delta z}{\partial z}\Delta z + \Delta^2 z = (\Delta y\,\delta l - \Delta x\,\delta m).
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

En vertu des égalités (8), l'égalité (17) devient

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2\Omega' = &\int_3 \rho_3 \Big[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}(\Delta z)^2\\
&\qquad + 2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\Delta y\,\Delta z + 2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x}\Delta z\,\Delta x + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\Delta x\,\Delta y\Big]\,dv_3\\
&+\int_3 \rho_3 \Big[(\Delta z\,\delta m - \Delta y\,\delta n)\frac{\partial U}{\partial x} + (\Delta x\,\delta n - \Delta z\,\delta l)\frac{\partial U}{\partial y}\\
&\qquad + (\Delta y\,\delta l - \Delta x\,\delta m)\frac{\partial U}{\partial z}\Big]\,dv_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (16) et (19), jointes aux égalités (10) et (11), donnent

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega') = &\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2\\
&+\int_{S_{12}} \rho_1\Big(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\Big)\varepsilon_1\,dS_{12}\\
&+\int_{S_{12}} \rho_2\Big(\frac{\partial V}{\partial x}Dx + \frac{\partial V}{\partial y}Dy + \frac{\partial V}{\partial z}Dz\Big)\varepsilon_2\,dS_{12}\\
&+ Q,
\end{aligned}
\right.
$$

Q étant une forme quadratique des six variables

$$
\delta f,\quad \delta g,\quad \delta h,\quad \delta l,\quad \delta m,\quad \delta n,
$$

$$
(21)\quad \left\{
\begin{aligned}
Q = \;& A_{11}(\delta f)^2 + A_{22}(\delta g)^2 + A_{33}(\delta h)^2\\
&+ A_{44}(\delta l)^2 + A_{55}(\delta m)^2 + A_{66}(\delta n)^2\\
&+ A_{23}\,\delta g\,\delta h + A_{31}\,\delta h\,\delta f + A_{12}\,\delta f\,\delta g\\
&+ A_{56}\,\delta m\,\delta n + A_{64}\,\delta n\,\delta l + A_{45}\,\delta l\,\delta m\\
&+ A_{14}\,\delta f\,\delta l + A_{25}\,\delta g\,\delta m + A_{36}\,\delta h\,\delta n\\
&+ A_{15}\,\delta f\,\delta m + A_{16}\,\delta f\,\delta n\\
&+ A_{26}\,\delta g\,\delta n + A_{24}\,\delta g\,\delta l\\
&+ A_{34}\,\delta h\,\delta l + A_{35}\,\delta h\,\delta m.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients A_{ij} de cette forme ont les valeurs suivantes :

$$A_{11} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\, dv_3,$$

$$A_{22} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\, dv_3,$$

$$A_{33} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{13} - \int_{S_{23}} \rho_2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z)\, dS_{23} + \int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\, dv_3,$$

$$\begin{aligned} A_{44} = & -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - yz \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) \right] \right. \\ & \qquad \left. + y^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right\} dS_{13} \\ & -\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ z^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) - yz \left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) \right] \right. \\ & \qquad \left. + y^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) \right\} dS_{23} \\ & + \int_3 \rho_3 \left(z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - y \frac{\partial U}{\partial y} - z \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{55} = & -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) \right] \right. \\ & \qquad \left. + z^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) \right\} dS_{13} \\ & -\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ x^2 \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - zx \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) \right] \right. \\ & \qquad \left. + z^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) \right\} dS_{23} \\ & + \int_3 \rho_3 \left(x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zx \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} + z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - z \frac{\partial U}{\partial z} - x \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{66} = & -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) \right] \right. \\ & \qquad \left. + x^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) \right\} dS_{13} \\ & -\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ y^2 \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - xy \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) \right] \right. \\ & \qquad \left. + x^2 \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) \right\} dS_{23} \\ & + \int_3 \rho_3 \left(y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - x \frac{\partial U}{\partial x} - y \frac{\partial U}{\partial y} \right) dv_3. \end{aligned}$$

$$A_{23} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, y)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, y)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} dv_3.$$

$$A_{31} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, z)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial z}\cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, z)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} dv_3.$$

$$A_{12} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, x)\right] dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(N, x)\right] dS_{23} + 2\int_3 \rho_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} dv_3.$$

$$\begin{aligned} A_{56} = \int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ & \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N, x) - xz\cos(N, y) - xy\cos(N, z)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N, z) - xz\cos(N, x)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N, y) - xy\cos(N, x)] \Big\} dS_{13} \\ + \int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ & \frac{\partial V}{\partial x}[2yz\cos(N, x) - xz\cos(N, y) - zy\cos(N, z)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial y}[x^2\cos(N, z) - xz\cos(N, x)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial z}[x^2\cos(N, y) - xy\cos(N, x)] \Big\} dS_{23} \\ - \int_3 \rho_2 \Big\{ & 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2xz\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} \\ & + 2x^2\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial z} \Big\} dv_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{64} = \int_{S_{13}} \rho_1 \Big\{ & \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N, z) - yz\cos(N, y)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N, y) - yx\cos(N, z) - yz\cos(N, x)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N, x) - yx\cos(N, y)] \Big\} dS_{13} \\ + \int_{S_{23}} \rho_2 \Big\{ & \frac{\partial V}{\partial x}[y^2\cos(N, z) - yz\cos(N, y)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial y}[2zx\cos(N, y) - yx\cos(N, z) - yz\cos(N, x)] \\ & + \frac{\partial V}{\partial z}[y^2\cos(N, x) - yx\cos(N, y)] \Big\} dS_{23} \end{aligned}$$

$$-\int_3 \rho_3 \left\{ 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - 2yz\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} \right.$$
$$\left. + 2y^2\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial z} - z\frac{\partial U}{\partial x} \right\} dv_3,$$

$$A_{45} = \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N, y) - zy\cos(N, z)] \right.$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N, x) - zy\cos(N, z)]$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N, z) - zy\cos(N, x) - zx\cos(N, y)] \right\} dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[z^2\cos(N, y) - zy\cos(N, z)] \right.$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y}[z^2\cos(N, x) - zx\cos(N, z)]$$
$$\left. + \frac{\partial V}{\partial z}[2xy\cos(N, z) - zy\cos(N, x) - zx\cos(N, y)] \right\} dS_{23}$$
$$-\int_3 \rho_3 \left\{ 2xy\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2zy\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - 2zx\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} \right.$$
$$\left. + 2z^2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - y\frac{\partial U}{\partial x} - x\frac{\partial U}{\partial y} \right\} dv_3,$$

$$A_{14} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, x)\left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\right) \right\} dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial x}[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, x)\left(y\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial V}{\partial y}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int_3 \rho_3 \left(y\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} - z\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right) dv_3,$$

$$A_{25} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N, x) - x\cos(N, z)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, y)\left(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\right) \right\} dS_{13}$$
$$-\int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial y}[z\cos(N, x) - x\cos(N, z)] \right.$$
$$\left. + \cos(N, y)\left(z\frac{\partial V}{\partial x} - x\frac{\partial V}{\partial z}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int \rho_3 \left(z\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} - x\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}\right) dv_3,$$

$$A_{36} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ \frac{\partial V}{\partial z} [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] + \cos(N, z)\left(x \frac{\partial V}{\partial z} - z \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right\} dS_{23}$$
$$+ 2\int_3 \rho_3 \left(x \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - y \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{15} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x\left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x\left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_3 \rho_3 \left(2z \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dv_3,$$

$$A_{26} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y\left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y\left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_3 \rho_3 \left(2x \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) dv_3,$$

$$A_{34} = -\int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z\left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$
$$- \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z\left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$
$$+ \int_3 \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$A_{16} = \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x\left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{13}$$
$$+ \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2y \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, x) - x\left[\frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, x) + \frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, y)\right] \right\} dS_{23}$$
$$- \int_3 \rho_3 \left(2y \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \frac{\partial U}{\partial y}\right) dv_3,$$

$$
\begin{aligned}
A_{24} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) \right] \right\} dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2z \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, y) - y \left[\frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, y) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(N, z) \right] \right\} dS_{23} \\
& - \int_{3} \rho_3 \left(2z \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial^2 U}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) dv_3, \\
A_{35} = & \int_{S_{13}} \rho_1 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) \right] \right\} dS_{13} \\
& + \int_{S_{23}} \rho_2 \left\{ 2x \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, z) - z \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cos(N, z) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(N, x) \right] \right\} dS_{23} \\
& - \int_{3} \rho_3 \left(2x \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial^2 U}{\partial z \, \partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) dv_3.
\end{aligned}
$$

Ces égalités, jointes aux égalités (20) et (21), font connaître la forme de la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$, dans le cas particulier où l'état initial du système est un état d'équilibre. Pour calculer plus brièvement cette quantité, nous avons supposé que les variations

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n$$

étaient des variations arbitraires, en sorte que l'on eût

$$\delta^2 f = 0, \quad \delta^2 g = 0, \quad \delta^2 h = 0, \quad \delta^2 l = 0, \quad \delta^2 m = 0, \quad \delta^2 n = 0.$$

Nous aurions pu ne pas faire cette hypothèse; la quantité

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$$

aurait alors renfermé une fonction linéaire et homogène de

$$\delta^2 f, \quad \delta^2 g, \quad \delta^2 h, \quad \delta^2 l, \quad \delta^2 m, \quad \delta^2 n.$$

Mais les égalités (28) du Chapitre II nous auraient permis de démontrer que cette fonction est identiquement nulle lorsque l'état initial du système est un état d'équilibre.

§ II. — *Stabilité de l'équilibre d'un système de fluides qui renferme un flotteur.*

Une transformation analogue à celle qui a fourni l'égalité (50) du Chapitre précédent permet d'écrire l'égalité (20) sous la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') = & \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}(\delta\rho_1)^2\,dv_1 + \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}(\delta\rho_2)^2\,dv_2 \\ & - \int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} + Q. \end{aligned}\right.$$

Nous avons admis que, quels que soient les fluides 1 et 2, on avait [Chapitre I, inégalités (48)],

$$(23)\qquad \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2} > 0, \qquad \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2} > 0.$$

Ces inégalités admises, nous allons chercher s'il est possible de marquer les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait, pour tout déplacement du système, l'inégalité

$$(24)\qquad \delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') > 0.$$

Ces conditions seront les conditions de stabilité du système.

Imaginons que l'on maintienne le flotteur immobile; que l'on garde une densité invariable au fluide qui remplit chaque élément de volume du système; on pourra néanmoins déformer la surface S_{12}, cette déformation étant simplement soumise à la condition

$$\int_{S_{12}} \varepsilon_1\,dS_{12} = 0.$$

L'inégalité (24) se réduira, dans ce cas, à

$$\int_{S_{12}} (\rho_2-\rho_1)\frac{\partial V}{\partial n_2}\varepsilon_1^2\,dS_{12} < 0.$$

Cette inégalité entraîne, comme nous l'avons vu à la fin du Cha-

pitre I, la conséquence suivante, qui est une PREMIÈRE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides : en tout point de cette surface où elle est différente de 0, *elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

On peut imaginer des déplacements qui laissent invariable la densité du fluide qui remplit chacun des éléments de volume du système; seulement, en exprimant que la masse de chacun des deux fluides doit demeurer invariable, on trouve que de semblables déplacements sont assujettis aux conditions suivantes :

$$(25)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1 \, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1 \, dS_{13} = 0, \\ \displaystyle\int_{S_{12}} \rho_2 \varepsilon_2 \, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2 \, dS_{23} = 0. \end{cases}$$

Si l'on remarque que les densités ρ_1, ρ_2 ont des valeurs constantes le long de la surface S_{12}, ces égalités peuvent s'écrire

$$(26)\qquad \begin{cases} \displaystyle\rho_1 \int_{S_{12}} \varepsilon_1 \, dS_{12} + \int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1 \, dS_{13} = 0, \\ \displaystyle\rho_2 \int_{S_{12}} \varepsilon_2 \, dS_{12} + \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2 \, dS_{23} = 0. \end{cases}$$

On peut même assujettir un tel déplacement à ne pas déformer la surface de séparation S_{12}; dans ce cas, les égalités (26) deviennent

$$\int_{S_{13}} \rho_1 \varepsilon_1 \, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} \rho_2 \varepsilon_2 \, dS_{23} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (11),

$$(27)\qquad \begin{cases} \displaystyle\delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, x) \, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, y) \, dS_{13} + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z) \, dS_{13} \\ \displaystyle\qquad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)] \, dS_{13} \\ \displaystyle\qquad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)] \, dS_{13} \\ \displaystyle\qquad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)] \, dS_{13} = 0. \end{cases}$$

et une égalité analogue, qui se déduit de la précédente en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2, et que nous désignerons par (27 *bis*).

Lorsque les six quantités δf, δg, δh, δl, δm, δn vérifient ces deux relations (27) et (27 *bis*) on peut prendre :

$\delta\rho_1 = 0$, en tout point du fluide 1 ;
$\delta\rho_2 = 0$, en tout point du fluide 2 ;
$\varepsilon_1 = 0$, en tout point de la surface S_{12}.

L'inégalité (24) se réduit alors à

$$Q > 0.$$

Cette inégalité nous donne une SECONDE CONDITION NÉCESSAIRE POUR LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME :

La forme quadratique Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *doit être une forme définie positive toutes les fois que ces six variables vérifient les deux relations linéaires et homogènes* (27) *et* (27 *bis*).

Nous venons de trouver deux conditions qui sont nécessaires pour que l'équilibre du système soit un équilibre stable; mais il n'est pas prouvé que ces conditions suffisent à assurer la stabilité de cet équilibre; inversement, nous pouvons énoncer deux CONDITIONS QUI SUFFISENT A ASSURER LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE DU SYSTÈME ; mais la seconde de ces conditions peut n'être pas nécessaire.

Voici ces conditions :

1° *La force extérieure n'est pas nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie, prise sur la surface de contact des deux fluides; en tout point de cette surface où elle est différente de* 0, *elle est dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense.*

2° *La forme quadratique* Q *des six variables* δf, δg, δh, δl, δm, δn *est une forme définie positive, quelles que soient les valeurs attribuées à ces variables; ou, du moins, elle ne devient nulle que pour des valeurs de ces variables qui ne vérifient pas à la fois les égalités* (27) *et* (27 *bis*).

Considérons, en effet, la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ donnée par l'éga-

lité (22); notre première condition empêche le troisième terme d'être jamais négatif; notre seconde condition produit le même effet sur le quatrième terme; quant aux deux premiers, en vertu des inégalités (23), ils ne sont jamais négatifs. De plus, les quatre termes ne pourront être simultanément égaux à 0; le quatrième, en effet, ne peut devenir égal à 0 que pour des valeurs de δf, δg, δh, δl, δm, δn qui ne vérifient pas à la fois les deux relations (27) et (27 *bis*); dans ce cas, l'un au moins des trois premiers termes, doit être différent de zéro.

§ III. — *Cas où les deux fluides confinent par une surface illimitée.*

La surface fixe qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions limitées; mais il peut se faire que la fonction potentielle V puisse se prolonger indéfiniment d'une manière analytique en dehors de cette surface; on pourra alors supposer que l'on prenne successivement des surfaces closes de plus en plus grandes, et que l'on donne à la surface de contact des deux fluides des dimensions de plus en plus grandes. C'est dans ce cas que nous allons maintenant nous placer.

Nous remarquerons, en premier lieu, que lorsqu'on étend ainsi, de plus en plus, l'aire de la surface de contact des deux fluides, en prolongeant analytiquement cette surface, on ne modifie pas les valeurs des coefficients de la forme quadratique Q.

Supposons que la forme Q puisse être rendue négative par un choix convenable des six variations

$$\delta f, \quad \delta g, \quad \delta h, \quad \delta l, \quad \delta m, \quad \delta n.$$

Si ces six quantités ne vérifient pas les conditions (27) et (27 *bis*), et si la surface qui enferme les deux fluides et le flotteur a des dimensions données, il n'est pas certain que l'équilibre du flotteur ne soit pas stable; mais nous allons démontrer que, *si l'on suppose variables les dimensions de la surface de contact des deux fluides, on pourra toujours prendre l'aire de cette surface assez grande pour que, dans le cas considéré, l'équilibre du système ne soit plus stable.*

Prenons, en effet, une surface S_{12} déterminée.

Nous pourrons imposer au système une variation virtuelle définie de la manière suivante :

1° Les éléments du déplacement du corps solide ont les valeurs considérées δf, δg, δh, δl, δm, δn, qui donnent à Q une valeur négative ;

2° La quantité $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ a la même valeur en tout point de la surface S_{12} ;

3° La quantité $\delta\rho_1$ a la même valeur en tout point du fluide 1 ;

4° La quantité $\delta\rho_2$ a la même valeur en tout point du fluide 2 ;

Ces diverses quantités sont liées par les relations qui expriment que chacun des fluides 1 et 2 garde une masse invariable ; ces relations sont l'égalité

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_1 \delta\rho_1\, dv_1 - \int_{S_{12}} \rho_1 \varepsilon_1\, dS_{12} \\ &\quad + \delta f \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, x)\, dS_{13} + \delta g \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, y)\, dS_{13} \\ &\qquad\qquad + \delta h \int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} \\ &\quad + \delta l \int_{S_{13}} \rho_1 [y \cos(N, z) - z \cos(N, y)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta m \int_{S_{13}} \rho_1 [z \cos(N, x) - x \cos(N, z)]\, dS_{13} \\ &\quad + \delta n \int_{S_{13}} \rho_1 [x \cos(N, y) - y \cos(N, x)]\, dS_{13} = 0 \end{aligned}\right.$$

et une égalité, que nous désignerons par (28 *bis*), et qui se déduit de la précédente en permutant les indices 1 et 2.

Ce déplacement peut faire prendre à la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ une valeur positive, bien que Q ait une valeur négative, car les trois termes

$$(\delta\rho_1)^2 \int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\, dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2 \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\, dv_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon_1^2 \int_{S_{12}} \frac{\partial N}{\partial n_2}\, dS_{12}$$

ont des valeurs positives.

Faisons maintenant croître les dimensions de la surface close qui enferme le système; l'aire de la surface S_{12} est multipliée par le nombre λ; le volume occupé par le fluide 1 est multiplié par le nombre μ_1; le volume occupé par le fluide 2 est multiplié par le nombre μ_2.

On voit sans peine que l'on vérifiera les égalités (28) et (28 *bis*) en prenant pour ε_1, $\delta\rho_1$, $\delta\rho_2$ de nouvelles valeurs ε'_1, $\delta\rho'_1$, $\delta\rho'_2$, telles que

$$\lambda\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \qquad \mu_1\delta\rho'_1 = \delta\rho_1, \qquad \mu_2\delta\rho'_2 = \delta\rho_2.$$

Les valeurs des intégrales

$$\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad \int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad \int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres qui seront respectivement de l'ordre de μ_1, μ_2, λ. Par conséquent, dans l'expression de

$$\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega'),$$

le terme Q, qui est négatif, gardera une valeur invariable, tandis que les valeurs positives des termes

$$(\delta\rho_1)^2\int_1 \frac{d^2\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1^2}\,dv_1, \quad (\delta\rho_2)^2\int_2 \frac{d^2\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2^2}\,dv_2, \quad (\rho_1 - \rho_2)\varepsilon_1^2\int_{S_{12}} \frac{\partial V}{\partial n_2}\,dS_{12}$$

seront multipliées par des nombres de l'ordre de $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\lambda}$.

On pourra donc toujours prendre μ_1, μ_2, λ assez grands pour que la quantité $\delta^2(\mathcal{F} + \Omega + \Omega')$ soit négative, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il résulte de cette proposition que si deux fluides, portant un flotteur, confinent par une surface illimitée, l'équilibre du système sera instable si la forme Q peut être rendue négative.

En rapprochant cette proposition de celles qui ont été démontrées au paragraphe précédent et qui sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides, nous arrivons à énoncer de la manière suivante les CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la*

stabilité de l'équilibre d'un corps flottant à la surface illimitée qui sépare deux fluides :

1° *La force extérieure ne doit pas être nulle en tous les points d'une aire d'étendue finie prise sur la surface de contact des deux fluides ; en tout point où cette force est différente de zéro, elle doit être dirigée vers l'intérieur du fluide le plus dense ;*

2° *La forme quadratique* Q *ne doit être négative pour aucun ensemble de valeurs de* δf, δg, δh, δl, δm, δn ; *elle ne doit pas être nulle pour un ensemble de valeurs des mêmes quantités vérifiant les égalités* (27) *ou* (27 *bis*).

Ainsi, dans le cas particulier où les deux fluides qui portent le flotteur confinent par une surface illimitée, le problème de la stabilité de l'équilibre des corps flottants est complètement résolu.

§ IV. — *Cas où les forces extérieures se réduisent à la pesanteur.*

Prenons l'axe des z dirigé vers le zénith ; si les forces extérieures qui agissent sur le flotteur et sur le corps solide se réduisent à la pesanteur, et si nous désignons par g l'intensité de la pesanteur, nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = g,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = g.$$

Les égalités données à la fin du § I, qui font connaître les coefficients A_{ij}, deviendront

$$A_{11} = 0,$$
$$A_{22} = 0,$$
$$A_{33} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N, z)\, dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N, z)\, dS_{23},$$
$$A_{44} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 y[y\cos(N, z) - z\cos(N, y)]\, dS_{23} - g\int_{3} \rho_3 z\, dv_3,$$

$$A_{55} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$-g\int_{S_{23}} \rho_2 x[x\cos(N,z) - z\cos(N,x)]\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3 z\,dv_3,$$
$$A_{66} = 0,$$
$$A_{23} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,y)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,y)\,dS_{23},$$
$$A_{31} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 \cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 \cos(N,x)\,dS_{23},$$
$$A_{12} = 0,$$
$$A_{56} = g\int_{S_{13}} \rho_1[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$+g\int_{S_{23}} \rho_2[x^2\cos(N,y) - xy\cos(N,x)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 y\,dv_3.$$
$$A_{64} = g\int_{S_{13}} \rho_1[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$+g\int_{S_{23}} \rho_2[y^2\cos(N,x) - yx\cos(N,y)]\,dS_{23} + g\int_3 \rho_3 x\,dv_3,$$
$$A_{45} = g\int_{S_{13}} \rho_1[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{13}$$
$$+g\int_{S_{13}} \rho_2[2xy\cos(N,z) - zy\cos(N,x) - zx\cos(N,y)]\,dS_{23},$$
$$A_{14} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N,x)\,dS_{13} - g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N,x)\,dS_{23},$$
$$A_{25} = g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,y)\,dS_{13} + g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N,y)\,dS_{23},$$
$$A_{36} = -g\int_{S_{13}} \rho_1[x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{13}$$
$$-g\int_{S_{23}} \rho_2[x\cos(N,y) - y\cos(N,x)]\,dS_{23},$$
$$A_{15} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 x\cos(N,x)\,dS_{13}$$
$$+g\int_{S_{23}} \rho_2 x\cos(N,x)\,dS_{23} - g\int_3 \rho_3\,dv_3,$$
$$A_{26} = 0,$$

$$A_{34} = g\int_{S_{13}} \rho_1 [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{23},$$
$$A_{16} = 0,$$
$$A_{24} = -g\int_{S_{13}} \rho_1 y\cos(N, y)\, dS_{13}$$
$$- g\int_{S_{23}} \rho_2 y\cos(N, y)\, dS_{23} - g\int \rho_3\, dv_3,$$
$$A_{35} = g\int_{S_{13}} \rho_1 [2x\cos(N, z) - z\cos(N, x)]\, dS_{13}$$
$$+ g\int_{S_{23}} \rho_2 [2x\cos(N, z) - z\cos(N, x)]\, dS_{23}.$$

Six de ces coefficients, les coefficients A_{11}, A_{22}, A_{66}, A_{12}, A_{26}, A_{16} sont égaux à 0; nous ne devons pas nous en étonner; en effet, il est évident *a priori* que la forme Q doit être identiquement nulle lorsque l'on a

$$\delta h = 0, \qquad \delta m = 0, \qquad \delta n = 0.$$

Une modification, infiniment petite ou finie, qui consiste exclusivement en une translation du flotteur parallèlement à la surface de contact des deux fluides et une rotation autour d'un axe normal à cette surface ne change en rien la valeur du potentiel thermodynamique du système; pour de tels déplacements, l'équilibre du système est indifférent; c'est seulement lorsqu'on les exclut qu'il peut être question de stabilité de l'équilibre.

§ V. — *Cas où les deux fluides en contact sont homogènes.*

L'expression de la forme Q devient beaucoup plus simple lorsque l'on suppose homogènes les deux fluides 1 et 2, soit qu'on les regarde comme incompressibles, soit que l'on néglige les variations que la densité de chacun de ces fluides éprouve d'un point à l'autre par l'effet de la pesanteur.

Pour transformer, dans ce cas, l'expression des coefficients A_{ij},

nous ferons usage des formules bien connues

$$(29)\qquad \begin{cases} \int F\cos(n_e, x)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial x}\,dv, \\ \int F\cos(n_e, y)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dv, \\ \int F\cos(n_e, z)\,dS = \int \frac{\partial F}{\partial z}\,dv, \end{cases}$$

dans lesquelles les intégrales des premiers membres s'étendent à une surface fermée S et les intégrales du second membre au volume v qu'enferme cette surface; n_e est la normale extérieure à la surface S.

Transformation du coefficient A_{33}. — Nous avons, d'après les formules du numéro précédent,

$$A_{33} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} \cos(N, z)\,dS_{23}.$$

Prolongeons, à l'intérieur du solide, la surface plane S_{12}; soit S'_{12} ce prolongement; soit Σ l'aire de la surface S'_{12}; appliquons la troisième égalité (29) à la surface fermée que forment les surfaces S_{13} et S'_{12}; nous trouverons sans peine

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} + \int_{S'_{12}} \cos(n_2, z)\,dS'_{12} = 0.$$

Mais, en tout point de la surface S'_{12}, $\cos(n_2, z) = 1$, *si nous supposons le fluide* 2 *superposé au fluide* 1. L'égalité précédente nous donne alors

$$\int_{S_{13}} \cos(N, z)\,dS_{13} = -\Sigma.$$

Nous aurons de même

$$\int_{S_{23}} \cos(N, z)\,dS_{23} = \Sigma$$

et, partant,

$$A_{33} = g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma.$$

Transformation des coefficients A_{44} *et* A_{55}. — Nous avons

$$A_{44} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{13}$$
$$- g\rho_2 \int_{S_{23}} [y^2 \cos(N, z) - zy \cos(N, y)]\, dS_{23} - g \int \rho_3 z\, dv_3.$$

La troisième égalité (29), appliquée à la surface fermée $S_{13}S'_{12}$, donne

$$(a) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{S_{13}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{13} + \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \\ \text{On a, de même,} \\ \displaystyle\int_{S_{23}} y^2 \cos(N, z)\, dS_{23} - \int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} = 0. \end{cases}$$

La seconde égalité (29), appliquée à la même surface fermée, donne

$$\int_{S_{13}} zy \cos(N, y)\, dS_{13} = \int z\, dv'_1,$$

v'_1 étant le volume compris entre les surfaces S'_{12} et S_{13}.

On a, de même,

$$\int_{S_{23}} zy \cos(N, y)\, dS_{23} = \int z\, dv'_2,$$

v'_2 étant le volume compris entre les surfaces S_{23} et S'_{12}.

Soient

ξ, η_1, ζ_1 les coordonnées du centre de gravité du fluide 1 qui remplirait le volume v'_1;

ξ_2, η_2, ζ_2 les coordonnées du centre de gravité du fluide 2 qui remplirait le volume v'_2;

M'_1 la masse du premier fluide;

M'_2 la masse du second fluide.

Nous aurons, d'après les égalités précédentes,

$$(b)\qquad \begin{cases} \rho_1 \displaystyle\int_{S_{13}} zy\cos(N, y)\, dS_{13} = \zeta_1 M'_1, \\ \rho_2 \displaystyle\int_{S_{23}} zy\cos(N, y)\, dS_{23} = \zeta_2 M'_2. \end{cases}$$

Soient ξ_3, η_3, ζ_3 les coordonnées du centre de gravité du solide; M_3 sa masse; nous aurons

$$(c)\qquad \int_3 \rho_3 z\, dv_3 = M_3 \zeta_3.$$

Les égalités (a), (b) et (c) nous donneront

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} + g(M'_1\zeta_1 - M'_2\zeta_2 - M_3\zeta_3),$$

Désignons par Ξ, H, Z les coordonnées du centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés par le corps solide; nous aurons

$$M'_1\zeta_1 + M'_2\zeta_2 = (M'_1 + M'_2)Z.$$

D'ailleurs, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc, tout calcul fait,

$$A_{44} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\, dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3).$$

On a de même

$$A_{55} = g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} z^2\, dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3).$$

Transformation des coefficients A_{23}, A_{31}. — Nous avons

$$A_{23} = -g\rho_1\int_{S_{13}} \cos(N, y)\, dS_{13} - g\rho_2\int_{S_{23}} \cos(N, y)\, dS_{23}.$$

La deuxième égalité (29), appliquée à la surface fermée formée par S_{13} et S'_{12} donne

$$\int_{S_{13}} \cos(N, y)\, dS_{13} = 0.$$

On a également

$$\int_{S_{23}} \cos(N, y)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{23} = 0.$$

On a de même

$$A_{31} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{56}, A_{64}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{56} = \quad & g\rho_1 \int_{S_{13}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [x^2 \cos(N, y) - xy \cos(N, x)]\, dS_{23} + g \int \rho_3 y\, dv_3 \end{aligned}$$

On trouve sans peine, par les égalités (29),

$$\int_{S_{13}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} x^2 \cos(N, y)\, dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} xy \cos(N, x)\, dS_{13} = \int y\, dv'_1,$$

$$\int_{S_{23}} xy \cos(N, x)\, dS_{23} = \int y\, dv'_2,$$

en sorte que l'on peut écrire

$$A_{56} = g(M_3 \eta_3 - M'_1 \eta_1 - M'_2 \eta_2) = g M_3 (\eta_3 - H).$$

Mais le centre de gravité du flotteur et le centre de gravité de l'ensemble des fluides déplacés sont sur une même verticale; on a donc

$$\eta_3 - H = 0$$

et

$$A_{56} = 0.$$

On a de même

$$A_{64} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{45}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{45} = \quad & g\rho_1 \int_{S_{13}} [2xy\cos(N, z) - zy\cos(N, x) - zx\cos(N, y)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [2xy\cos(N, z) - zy\cos(N, x) - zx\cos(N, y)]\, dS_{23}. \end{aligned}$$

On trouve sans peine, à l'aide des formules (29),

$$\int_{S_{13}} xy\cos(N, z)\, dS_{13} = -\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}} xy\cos(N, z)\, dS_{23} = \int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12},$$

$$\int_{S_{13}} z[y\cos(N, x) + x\cos(N, y)]\, dS_{13} = 0,$$

$$\int_{S_{23}} z[y\cos(N, x) + x\cos(N, y)]\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{45} = -2g(\rho_1 - \rho_3)\int_{S'_{12}} xy\, dS'_{12}.$$

Transformation des coefficients A_{14}, A_{25}. — Nous avons

$$A_{14} = -g\rho_1 \int_{S_{13}} y\cos(N, x)\, dS_{13} - g\rho_2 \int_{S_{23}} y\cos(N, x)\, dS_{23}.$$

On trouve sans peine, par les formules (29),

$$\int_{S_{13}} y\cos(N, x)\, dS_{13} = 0, \qquad \int_{S_{23}} y\cos(N, x)\, dS_{23} = 0$$

et, par conséquent,

$$A_{14} = 0.$$

De même,

$$A_{25} = 0.$$

Transformation du coefficient A_{36}. — Il suffit de remarquer que l'on a

$$A_{36} = -(A_{15} + A_{25})$$

pour trouver

$$A_{36} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{15}, A_{24}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{15} = \quad & g\rho_1 \int_{S_{13}} x\cos(N, x)\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} x\cos(N, x)\, dS_{23} - g\int \rho_3\, dv_3. \end{aligned}$$

Les formules (29) donnent

$$\int_{S_{13}} x\cos(N, x)\, dS_{13} = v'_1,$$

$$\int_{S_{23}} x\cos(N, x)\, dS_{23} = v'_2.$$

On a donc

$$A_{15} = g(M'_1 + M'_2 - M_3).$$

Mais, d'après le principe d'Archimède,

$$M'_1 + M'_2 = M_3.$$

On a donc

$$A_{15} = 0$$

et de même

$$A_{24} = 0.$$

Transformation des coefficients A_{34}, A_{35}. — Nous avons

$$\begin{aligned} A_{34} = \quad & g\rho_1 \int_{S_{13}} [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{13} \\ & + g\rho_2 \int_{S_{23}} [z\cos(N, y) - 2y\cos(N, z)]\, dS_{23}. \end{aligned}$$

Les formules (29) nous donnent sans peine

$$\int_{S_{13}} z\cos(N, y)\,dS_{13} = 0,$$

$$\int_{S_{32}} z\cos(N, y)\,dS_{23} = 0,$$

$$\int_{S_{13}} y\cos(N, z)\,dS_{13} = -\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12},$$

$$\int_{S_{23}} y\cos(N, z)\,dS_{23} = \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}$$

et, par conséquent,

$$A_{34} = 2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}.$$

On a de même

$$A_{35} = -2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}.$$

Les calculs que nous venons de faire nous apprennent que, *dans le cas où le flotteur est porté par deux fluides homogènes soumis à la seule action de la pesanteur, la forme quadratique* Q *peut s'écrire*

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\Sigma(\delta h)^2 \\
& + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta l)^2 \\
& + \left[g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12} + M_3 g(Z - \zeta_3)\right](\delta m)^2 \\
& - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12}\right]\delta l\,\delta m \\
& + \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} y\,dS'_{12}\right]\delta h\,\delta l \\
& - \left[2g(\rho_1 - \rho_2)\int_{S'_{12}} x\,dS'_{12}\right]\delta h\,\delta m.
\end{aligned}\right.$$

Cette forme donnée à la quantité Q suppose l'axe des z vertical et, par conséquent, le plan des xy horizontal; mais elle ne suppose rien de plus au sujet des axes de coordonnées. Par un choix plus particulier des axes de coordonnées, on peut lui donner une forme beaucoup plus simple.

En premier lieu, *imaginons que l'on fasse passer l'axe des z par le centre de gravité γ de l'aire Σ de la section à fleur d'eau* S'_{12}; nous aurons

$$(31) \qquad \int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} = 0, \qquad \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} = 0.$$

En second lieu, si par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau on mène, dans le plan de cette section, un axe mobile, le moment d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport à cet axe D variera lorsqu'on fera tourner cet axe D autour du point γ. On sait qu'il existe une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est maximum, et une position de l'axe D pour laquelle le moment d'inertie est minimum; ces deux positions sont rectangulaires; on les nomme les *axes principaux d'inertie de la section* S'_{12}; les moments d'inertie de la section S'_{12} par rapport à ces axes sont les *moments d'inertie principaux* de cette section. *Prenons les axes* Ox, Oy, *parallèles aux axes principaux d'inertie de la section à fleur d'eau;* désignons par J_x, J_y les moments principaux d'inertie qui se rapportent respectivement à l'axe parallèle à Ox et à l'axe parallèle à Oy. Nous aurons

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{S'_{12}} y^2\,dS'_{12} = J_x, \\ &\int_{S'_{12}} x^2\,dS'_{12} = J_y, \\ &\int_{S'_{12}} xy\,dS'_{12} = 0. \end{aligned} \right.$$

En vertu des égalités (31) et (32), l'égalité (30) se réduit à

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q = {} & g(\rho_1 - \rho_2)\,\Sigma(\delta h)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_x + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta l)^2 \\ & + [g(\rho_1 - \rho_2)J_y + M_3 g(Z - \zeta_3)](\delta m)^2. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas où les fluides 1 et 2 sont homogènes, les égalités (27) et (27 *bis*) se réduisent à la forme unique

$$(34)\qquad \Sigma\,\delta h + \delta l \int_{S'_{12}} y\,dS'_{12} - \delta m \int_{S'_{12}} x\,dS'_{12} = 0.$$

Si l'on fait passer l'axe des z par le centre de gravité γ de la section à fleur d'eau, cette égalité se réduit à

$$(35)\qquad \delta h = 0.$$

Les égalités (33) et (35) nous permettent de donner les CONDITIONS QUI SONT NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES *pour la stabilité de l'équilibre d'un corps solide pesant flottant à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants.*

Si nous nous reportons à ce que nous avons dit à la fin du § II, nous pouvons énoncer les propositions suivantes :

1° Il est *nécessaire* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense, ce qu'exprime l'inégalité

$$(36)\qquad \rho_1 - \rho_2 > 0.$$

Il est *nécessaire* que la forme Q soit positive pour tous les déplacements du solide qui vérifient l'égalité (35), ce qui, en vertu de l'égalité (33), donne les inégalités

$$(37)\qquad \begin{cases} M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_x > 0, \\ M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_y > 0. \end{cases}$$

2° Il est *suffisant* que le fluide le moins dense soit superposé au fluide le plus dense et qu'en outre la quantité Q soit positive pour tous les déplacements du solide. Or ces conditions suffisantes sont vérifiées lorsque les conditions nécessaires (36) et (37) le sont.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour que l'équilibre d'un corps solide pesant qui flotte à la surface de séparation de deux fluides homogènes pesants soit un

équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les trois inégalités

$$\rho_1 - \rho_2 > 0, \tag{36}$$

$$\left\{\begin{array}{l} M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_x > 0, \\ M_3 g(Z - \zeta_3) + g(\rho_1 - \rho_2) J_y > 0. \end{array}\right. \tag{37}$$

On suppose exclus, bien entendu, les déplacements pour lesquels on aurait

$$\delta h = 0, \qquad \delta l = 0, \qquad \delta m = 0;$$

pour de tels déplacements, l'*équilibre du système est indifférent.*

Les conditions de stabilité obtenues sont indépendantes de l'aire de la surface de contact des deux fluides; par conséquent, *elles s'appliquent même au cas où les deux fluides sont en contact par une surface illimitée.*

Des deux inégalités (37), une seule est nécessaire; des deux moments d'inertie principaux, J_x, J_y, il en est un qui est plus petit que l'autre, à moins qu'ils ne soient égaux entre eux; soit j la plus petite des deux quantités J_x, J_y; les deux inégalités (37) pourront être remplacées par l'inégalité unique

$$M_3(Z - \zeta_3) + (\rho_1 - \rho_2) j > 0. \tag{38}$$

On reconnaît sans peine dans cette inégalité la condition trouvée par Poisson et Duhamel et critiquée par Clebsch.

Nous pouvons donc, en dernière analyse, énoncer la proposition suivante :

POUR QUE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE PESANT QUI FLOTTE SUR LA SURFACE DE SÉPARATION, LIMITÉE OU ILLIMITÉE, DE DEUX FLUIDES HOMOGÈNES PESANTS SOIT UN ÉQUILIBRE STABLE, IL FAUT ET IL SUFFIT : 1° QUE LE FLUIDE LE MOINS DENSE SOIT SUPERPOSÉ AU FLUIDE LE PLUS DENSE; 2° QUE LE PETIT MÉTACENTRE SOIT AU-DESSUS DU CENTRE DE GRAVITÉ DU CORPS SOLIDE.

Nos formules générales nous redonnent donc la règle classique de la

stabilité de l'équilibre des corps flottants; elles la démontrent par une méthode qui nous paraît exempte de toute contestation.

Il nous est possible maintenant d'expliquer pourquoi le raisonnement de M. Guyou, bien qu'inexact, conduisait dans le cas actuel à des conclusions exactes.

Le raisonnement de M. Guyou consiste, comme nous l'avons vu, à partager toute modification du système en trois modifications composantes :

1° Une déformation de la surface de séparation des deux fluides;

2° Une translation verticale du corps flottant;

3° Un déplacement qui n'altère pas le volume immergé, c'est-à-dire une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité de l'aire de la section à fleur d'eau.

M. Guyou cherche la condition pour que le centre de gravité du système s'élève en chacune de ces modifications isolées; en d'autres termes, il cherche à rendre positive la variation seconde du potentiel relative à chacune des modifications isolées.

Il admet alors que la variation seconde du potentiel relative à la modification la plus générale du système est positive.

En général, ce raisonnement ne serait pas valable, parce que la variation seconde du potentiel d'un système relative à la modification la plus générale de ce système n'est pas la somme des variations secondes relatives à des modifications partielles en lesquelles la modification la plus générale peut se décomposer.

Mais cette proposition, qui n'est ordinairement pas vraie, se trouve être exacte dans le cas particulier qui nous occupe.

En effet, la variation seconde du potentiel thermodynamique du système est, pour la modification la plus générale, en vertu des égalités (20) et (33),

$$\begin{aligned}\delta^2(\mathcal{F}+\Omega+\Omega') = {} & (\rho_1-\rho_2)g\int_{S_{12}}\varepsilon_1^2\,dS_{12} + (\rho_1-\rho_2)g\Sigma(\delta h)^2 \\ & + [(\rho_1-\rho_2)g\,J_x + M_3 g(Z-\zeta_3)](\delta l)^2 \\ & + [(\rho_1-\rho_2)g\,J_y + M_3 g(Z-\zeta_3)](\delta m)^2.\end{aligned}$$

Or le premier terme représente précisément la variation seconde rela-

tive à la première modification composante considérée par M. Guyou; le deuxième terme représente la variation seconde relative à la deuxième modification composante; et les deux derniers termes représentent la variation seconde relative à la troisième modification composante. Ainsi la variation seconde du potentiel, relativement à la modification la plus générale est bien la somme des variations secondes relatives aux trois modifications partielles que M. Guyou a imaginées.

Mais l'exactitude de cette proposition tient à une circonstance particulière au cas que nous venons de traiter; cette circonstance, c'est l'absence de termes en $\delta l \delta h$ et en $\delta m \delta h$. Elle cesserait d'être exacte, même pour le cas de la pesanteur, si les deux fluides étaient assez compressibles pour cesser d'être sensiblement homogènes.

Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. Le but du présent Mémoire est de montrer que, sur une courbe algébrique quelconque, on peut toujours, d'une infinité de manières, déterminer un certain nombre d'arcs dont la somme algébrique s'exprime par des fonctions rationnelles : dans un travail publié au LVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* j'avais esquissé l'étude de la même question, mais les résultats que j'obtenais étaient très incomplets et, sur certains points de détail, peu précis; ils étaient d'ailleurs limités aux courbes planes.

Le Mémoire actuel comprend trois Parties. Dans la première, on établit une formule qui donne la somme des arcs interceptés sur une courbe, gauche ou plane, par des surfaces convenablement choisies et l'on montre, par la discussion de la formule, que cette somme est, en général, rationnelle et ne peut devenir logarithmique que pour certaines courbes particulières.

La seconde Partie est consacrée à des applications générales de la formule fondamentale; on y étudie spécialement les cas où les arcs introduits sont susceptibles d'une définition géométrique simple et l'on examine, avec quelque détail dans cet ordre d'idées, les propriétés des courbes planes.

Le travail se termine, dans la troisième Partie, par des applications

aux coniques et à des courbes particulières des troisième et quatrième ordres.

2. Soit $\mathcal{C}$ une courbe, intersection totale ou partielle de deux surfaces algébriques

$$f(X, Y, Z) = 0, \qquad \varphi(X, Y, Z) = 0,$$

d'ordres m et p. On suppose que $\mathcal{C}$ n'est multiple sur aucune des deux surfaces et que celles-ci ne se touchent pas tout le long de $\mathcal{C}$. L'arc de la courbe, dans un système d'axes rectangulaires, est représenté par l'intégrale

$$\int \frac{dX}{A} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

en posant, pour abréger,

$$A = f'_Y \varphi'_Z - f'_Z \varphi'_Y, \qquad B = f'_Z \varphi'_X - f'_X \varphi'_Z, \qquad C = f'_X \varphi'_Y - f'_Y \varphi'_X.$$

A cause du radical qui figure sous le signe $\int$, l'intégrale n'est pas (sauf pour certaines courbes particulières, dites *de direction*) une intégrale abélienne appartenant à la courbe $\mathcal{C}$; il en résulte que la somme des arcs interceptés sur $\mathcal{C}$ par deux surfaces quelconques, de même degré, n'est pas une fonction rationnelle et logarithmique des paramètres de ces deux surfaces.

On peut toutefois choisir les surfaces sécantes de manière que cette condition soit réalisée.

Soient, en effet, F et Φ deux polynomes quelconques en X, Y, Z, dont les coefficients dépendent rationnellement de paramètres $u, v, \ldots$, que nous supposerons en nombre égal à deux pour abréger l'écriture; considérons les surfaces $\mathcal{F}$, représentées par l'équation

$$(1) \qquad \mathcal{F} = F^2(X, Y, Z, u, v) - \Phi^2(X, Y, Z, u, v)(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

et cherchons à évaluer la somme algébrique des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre deux surfaces $\mathcal{F}$, correspondant aux valeurs u, v et $u + du$, $v + dv$ des paramètres.

En vertu de la relation (1), cette somme sera

$$\sum \frac{dX}{A}\frac{F}{\Phi} \quad \text{ou} \quad du\sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)\frac{F}{A\Phi} + dv\sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)\frac{F}{A\Phi},$$

les sommes étant étendues aux points communs à la courbe $\mathfrak{C}$ et à la surface (1). Il est clair, d'ailleurs, puisque le radical a disparu, que les deux dernières sommes, qui sont des fonctions symétriques de ces points, sont des fonctions rationnelles de u et de v [ainsi que des coefficients des surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, en général (¹)]; soient $\psi(u, v)$ et $\chi(u, v)$ ces deux fonctions : la somme des arcs compris sur $\mathfrak{C}$ entre les surfaces $\mathfrak{F}$ qui correspondent aux valeurs u_0, v_0 et u, v des paramètres a pour valeur

$$(2) \qquad \int_{u_0}^{u} \psi(u, v)\, du + \int_{v_0}^{v} \chi(u_0, v)\, dv,$$

et s'exprime dès lors (théorème d'Abel) en fonction rationnelle et logarithmique de u, v.

3. Nous allons maintenant indiquer une formule simple pour calculer l'intégrale (2), et nous arriverons ainsi à ce résultat remarquable que, en général, *les logarithmes disparaissent* dans cette intégrale, de sorte que la somme des arcs considérés est une fonction rationnelle des paramètres u, v, c'est-à-dire des coefficients des polynomes F et Φ.

Nous nous appuierons à cet effet sur une formule établie par nous au Tome V (4ᵉ série) de ce Journal (p. 86), et que nous allons rappeler.

Soit $\mathfrak{C}$ une courbe gauche; X, Y, Z étant les coordonnées d'un de ses points, nous passerons aux coordonnées homogènes en posant

$$X = \frac{x}{t}, \qquad Y = \frac{y}{t}, \qquad Z = \frac{z}{t}.$$

(¹) La somme des valeurs que prend une fonction rationnelle aux points communs à une surface quelconque et à une courbe $\mathfrak{C}$, intersection partielle de deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, est rationnelle en fonction des coefficients de ces dernières, lorsque la projection de $\mathfrak{C}$ sur un plan quelconque a ses coefficients rationnels en fonction de ceux de f et de φ.

On supposera que x, y, z, t sont exprimés en fonction holomorphe d'une variable, λ, et l'on désignera par $x', x'', \ldots, t', t'', \ldots$ les dérivées successives de ces fonctions par rapport à λ.

Considérons maintenant une différentielle abélienne appartenant à $\mathfrak{C}$.

$$\frac{Q}{R} d\left(\frac{x}{t}\right),$$

Q et R étant deux polynomes homogènes et de même ordre, en x, y, z, t. Si l'on désigne par $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U) = 0$ l'équation d'une famille de surfaces dont l'équation dépend rationnellement d'un paramètre, U, on a la formule

$$(3) \qquad \sum \frac{Q}{R} \frac{d}{dU}\left(\frac{x}{t}\right) = \sum r.$$

Dans le premier membre, la somme s'étend aux points communs à la courbe $\mathfrak{C}$ et à la surface $\mathfrak{F} = 0$; $d\left(\frac{x}{t}\right)$ désigne l'accroissement de la coordonnée $\left(\frac{x}{t}\right)$ d'un de ces points, quand on passe de la surface $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U) = 0$ à la surface $\mathfrak{F}(x, y, z, t, U + dU) = 0$; dans le second membre Σr désigne la somme des résidus, *par rapport aux zéros de* R *et de* t, de la fonction de la variable λ,

$$\Theta(\lambda) = \frac{Q}{R} \frac{\mathfrak{F}'_U}{\mathfrak{F}} \frac{x't - xt'}{t^2} \quad (^1).$$

Ces résidus se calculent d'ailleurs sans qu'il soit nécessaire de connaître l'expression de x, y, z, t en fonction de λ; ils dépendent des éléments géométriques de la courbe $\mathfrak{C}$ aux points où elle est coupée par les surfaces $R = 0$, $t = 0$.

4. Pour appliquer la formule (3) au cas qui nous occupe, supposons d'abord que, dans l'équation des surfaces sécantes,

$$F^2 - \Phi^2(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

(1) Cette formule s'applique même si Q et R contiennent le paramètre U.

Φ dépende seul d'un paramètre, u; les coefficients de F sont alors supposés constants. Considérons, le long de $\mathcal{C}$, la différentielle abélienne

$$\frac{dX}{A}\frac{F}{\Phi} \quad \text{ou} \quad \frac{F}{A\Phi}d\left(\frac{x}{t}\right);$$

on a, d'après la formule (3),

$$\sum \frac{F}{A\Phi}\frac{d}{du}\left(\frac{x}{t}\right) = \sum r,$$

la somme du premier membre s'étendant aux points communs à la courbe $\mathcal{C}$ et à la surface $\mathcal{F}$:

$$(4) \quad \mathcal{F}(x, y, z, t, u) = F^2(x, y, z, t) - \Phi^2(x, y, z, t, u)[A^2 + B^2 + C^2]$$

et Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de $\Phi A t^2$. de la fonction

$$\Theta(\lambda) = -\frac{F}{A\Phi}\,\frac{x't - xt'}{t^2}\cdot\frac{2\Phi\Phi'_u}{\mathcal{F}}(A^2 + B^2 + C^2),$$

où x, y, z, t sont remplacés par leurs valeurs en fonction du paramètre λ, le long de la courbe $\mathcal{C}$.

D'après tout ce qui précède, la somme algébrique des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre les surfaces (4), qui correspondent aux valeurs u_0 et u du paramètre, a pour valeur

$$\int_{u_0}^{u} du\,(\Sigma r),$$

et tout revient ainsi à calculer les résidus r.

5. Observons d'abord que les zéros de Φ ne rendent pas $\Theta(\lambda)$ infini, puisque le facteur Φ peut être supprimé aux deux membres de la fonction $\Theta(\lambda)$, qui s'écrit

$$(5) \quad \Theta(\lambda) = -2\frac{F}{A}\,\frac{x't - xt'}{t^2}\,\frac{\Phi'_u}{F^2 - \Phi^2(A^2 + B^2 + C^2)}(A^2 + B^2 + C^2).$$

On n'a donc à calculer que les résidus de cette fonction qui correspondent à des zéros de A ou de t. Soient λ_0 un de ces zéros, r_0 le résidu correspondant.

La quantité λ_0 étant indépendante de u, l'expression

$$\int_{u_0}^{u} r_0\, du$$

est évidemment le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction de λ

$$\int_{u_0}^{u} \Theta(\lambda, u)\, du,$$

intégrale dans le calcul de laquelle λ est regardé comme une quantité indépendante de u. Or on a, d'après la forme (5),

$$\int \Theta(\lambda, u)\, du = \frac{x't - xt'}{t^2}\, \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{A} \log\left(\frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right).$$

D'ailleurs A, B, C sont proportionnels aux cosinus directeurs de la tangente en un point de $\mathcal{C}$; donc

$$(5\,bis) \qquad \frac{A}{x't - xt'} = \frac{B}{y't - yt'} = \frac{C}{z't - zt'},$$

et la fonction précédente, que nous désignerons par $\mathcal{R}(\lambda, u)$, s'écrit

$$(6) \quad \mathcal{R}(\lambda, u) = \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2} \log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

L'intégrale qui donne la somme des arcs cherchés, c'est-à-dire

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

est donc égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de A et de t, de la fonction

$$\mathcal{R}(\lambda, u) - \mathcal{R}(\lambda, u_0);$$

comme d'ailleurs $\mathfrak{R}$ ne devient pas infini quand A s'annule, les seuls résidus à considérer sont ceux qui correspondent aux zéros de t [1].

6. Supposons maintenant que Φ ne contienne pas de paramètre variable, mais que F dépende d'un paramètre v.

L'élément d'arc de $\mathfrak{S}$ peut s'écrire

$$ds = \frac{dX(A^2+B^2+C^2)}{A\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Pour les points de $\mathfrak{S}$ situés sur la surface

$$(7) \qquad \mathfrak{F} = F^2(X, Y, Z, v) - \Phi^2(X, Y, Z)(A^2+B^2+C^2) = 0,$$

on a

$$ds = \frac{dX}{AF}(A^2+B^2+C^2)\Phi.$$

Partant alors de cette différentielle rendue homogène en x, y, z, t, on a, comme au n° 4, la formule

$$\sum \frac{\Phi(A^2+B^2+C^2)}{AF}\frac{d}{dv}\left(\frac{x}{t}\right) = \Sigma r,$$

la somme du premier membre s'étendant aux points communs à $\mathfrak{S}$ et à la surface (7), $\mathfrak{F} = 0$, et Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de FAt^2 de la fonction

$$\theta(\lambda) = \frac{\Phi}{AF}(A^2+B^2+C^2)\frac{\mathfrak{F}'_v}{\mathfrak{F}}\frac{x't-xt'}{t^2}$$

ou

$$(8) \qquad \theta(\lambda) = 2\frac{\Phi}{A}\frac{x't-xt'}{t^2}\frac{F'_v}{F^2-\Phi^2(A^2+B^2+C^2)}(A^2+B^2+C^2).$$

Les seuls résidus à considérer sont encore, puisque le facteur F a disparu du dénominateur, ceux qui correspondent aux zéros de A et

---

[1] On pouvait voir directement, en s'appuyant sur les équations (5 *bis*), que $\theta(\lambda)$ reste fini aux points de $\mathfrak{S}$ qui annulent A, à moins que ces points n'annulent t.

de t; si r_0 est un de ces résidus, correspondant à une valeur λ_0 de λ, on voit, comme au n° 5, que l'intégrale

$$\int_{v_0}^{v} r_0 \, dv$$

est le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction

$$\int_{v_0}^{v} \theta(\lambda, v) \, dv;$$

or on a, d'après (8),

$$\int \theta(\lambda, v) \, dv = \frac{x't - xt'}{t^2} \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{A} \log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En désignant par $s(\lambda, v)$ le second membre, la somme des arcs interceptés sur $\mathfrak{S}$ par les surfaces (7), qui correspondent aux valeurs v_0 et v du paramètre, est donc égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction $s(\lambda, v) - s(\lambda, v_0)$.

D'ailleurs la fonction s a la même forme que la fonction $\mathfrak{R}$.

7. Si maintenant l'on suppose que Φ dépende d'un paramètre u, et F d'un paramètre v, variant simultanément d'une manière quelconque, il est clair que la somme des arcs interceptés sur $\mathfrak{S}$ par deux surfaces du système

$$F^2(x, y, z, t, v) - \Phi^2(x, y, z, t, u)(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

correspondant aux valeurs u_0, v_0 et u, v des paramètres, sera la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction de λ

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) - \mathfrak{R}(\lambda, u_0, v) + s(\lambda, u_0, v) - s(\lambda, u_0, v_0)$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) - \mathfrak{R}(\lambda, u_0, v_0),$$

puisque l'on a

$$\mathfrak{R}(\lambda, u, v) = s(\lambda, u, v).$$

La fonction $\mathcal{R}$ a pour expression :

$$(6)\quad \begin{cases} \mathcal{R}(\lambda) = \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2} \\ \qquad \times \log \dfrac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases}$$

8. Montrons qu'en général les logarithmes disparaissent dans les résidus de $\mathcal{R}$.

Les résidus à considérer sont ceux qui correspondent aux zéros de t, c'est-à-dire aux points à l'infini sur $\mathcal{C}$.

Plusieurs cas sont à considérer selon la nature de ces points.

1° Le point est un point simple ou multiple, à branches distinctes ou non, mais la courbe n'y touche pas le plan de l'infini. De plus ce point n'est pas sur le cercle isotrope.

Soit λ_0 la valeur du paramètre correspondant au point considéré (ou une de ces valeurs s'il y en a plusieurs); on aura, en posant

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon,$$

pour des valeurs assez petites de ε,

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{\alpha_0}{\varepsilon^p} + \dfrac{\alpha_1}{\varepsilon^{p-1}} + \ldots + \dfrac{\alpha_{p-1}}{\varepsilon} + \alpha_p + \alpha_{p+1}\varepsilon + \ldots, \\ \dfrac{y}{t} = \dfrac{\beta_0}{\varepsilon^p} + \ldots, \\ \dfrac{z}{t} = \dfrac{\gamma_0}{\varepsilon^p} + \ldots. \end{cases}$$

La tangente correspondante de $\mathcal{C}$ n'est pas dans le plan de l'infini, par hypothèse; il faut dès lors que les quantités $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$; $\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}$; $\gamma_0, \ldots, \gamma_{p-1}$ soient respectivement proportionnelles, en sorte qu'on a

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} \dfrac{y}{t} = \mu\left(\dfrac{x}{t}\right) + b_0 + b_1\varepsilon + \ldots, \\ \dfrac{z}{t} = \nu\left(\dfrac{x}{t}\right) + c_0 + c_1\varepsilon + \ldots, \end{cases}$$

μ et ν étant des constantes. La direction du point considéré à l'infini

est $\frac{x}{1} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}$ et la quantité $1 + \mu^2 + \nu^2$ n'est pas nulle, puisque, en vertu de notre seconde hypothèse, le point n'est pas sur le cercle isotrope.

On déduit des deux équations précédentes, en dérivant par rapport à ε,

$$(9\,ter)\qquad \begin{cases} \dfrac{y't - yt'}{t^2} = \mu\,\dfrac{x't - xt'}{t^2} + b_1 + \ldots, \\[2ex] \dfrac{z't - zt'}{t^2} = \nu\,\dfrac{x't - xt'}{t^2} + c_1 + \ldots; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}$$
$$= \frac{x't - xt'}{t^2}\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2 + \eta},$$

η étant une quantité s'annulant avec ε, et telle, de plus, que le produit

$$\eta\,\frac{x't - xt'}{t^2}$$

reste fini pour $\varepsilon = 0$. D'après cela le résidu de $\mathcal{R}(\lambda)$, pour $\lambda = \lambda_0$, est le même que celui de la fonction

$$(10)\qquad \frac{x't - xt'}{t^2}\sqrt{1 + \mu^2 + \nu^2}\log\frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a, en dérivant la première des relations (9),

$$(10\,bis)\qquad \frac{x't - xt'}{t^2} = -p\,\frac{\alpha_0}{\varepsilon^{p+1}} + \ldots - \frac{a_{p-1}}{\varepsilon^2} + \alpha_{p+1} + \ldots,$$

le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ manquant au second membre. Donc, dans le résidu de la fonction (10), le seul terme qui puisse contenir un logarithme disparaît, et il ne reste que des termes rationnels en u et v.

2° Le point à l'infini est sur le cercle isotrope, ou c'est un point de contact de la courbe $\mathfrak{S}$ et du plan de l'infini.

Dans les deux cas, il est clair que $A^2 + B^2 + C^2$ s'annule en ce

point; dès lors, dans $\mathfrak{R}(\lambda)$, le terme logarithmique

$$\log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

tend vers $\log \frac{F}{F}$, ou zéro. Les logarithmes disparaissent donc encore dans les résidus. Il ne peut y avoir d'exception que si F s'annule au point considéré, et de telle sorte que l'expression

$$\frac{1}{F}\Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

ou son carré

$$(11) \qquad \frac{\Phi^2(A^2 + B^2 + C^2)}{F^2},$$

tende vers une limite finie, non nulle.

9. Voici donc le théorème général qui résulte de ces recherches :

Théorème général. — *Soit $\mathfrak{C}$ une courbe algébrique, intersection totale ou partielle de deux surfaces, $f = 0$, $\varphi = 0$, sur aucune desquelles elle n'est multiple et qui ne se touchent pas en tous les points de cette courbe; posons pour abréger*

$$A = f'_y\varphi'_z - f'_z\varphi'_y; \qquad B = f'_z\varphi'_x - f'_x\varphi'_z; \qquad C = f'_x\varphi'_y - f'_y\varphi'_x.$$

On coupe la courbe $\mathfrak{C}$ par des surfaces ayant pour équation

$$F^2 - \Phi^2(A^2 + B^2 + C^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{F} = 0.$$

F *et* Φ *désignant des polynomes quelconques en x, y, z, t; la somme algébrique des arcs compris sur la courbe $\mathfrak{C}$ entre deux surfaces de ce système, $\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}_1$, obtenues en faisant suivre une loi de variation quelconque aux coefficients des polynomes* F *et* Φ, *est une fonction rationnelle des valeurs initiales et finales de ces coefficients.*

C'est également une fonction rationnelle des coefficients des deux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, pourvu toutefois que l'équation de la

projection de $\mathfrak{C}$ sur un plan quelconque ait ses coefficients rationnels par rapport à ceux des deux surfaces [1].

Le théorème précédent *ne peut souffrir d'exception* que si, pour les valeurs les plus générales des coefficients de F et de Φ vérifiant la loi de variation adoptée, les surfaces $F^2 = 0$ et $(A^2 + B^2 + C^2)\Phi^2 = 0$, passent par un même point à l'infini de $\mathfrak{C}$, $(x_0, y_0, z_0, 0)$, et de telle sorte que le quotient

$$\frac{\Phi^2(A^2 + B^2 + C^2)}{F^2} \tag{11}$$

tende vers une limite finie, non nulle, lorsque le point (x, y, z, t) tend vers $(x_0, y_0, z_0, 0)$, en restant sur une des branches de la courbe $\mathfrak{C}$ qui passent par ce dernier point.

Il faut de plus, pour que l'exception puisse se présenter, que ce point soit un point du cercle isotrope ou un point de contact de la courbe et du plan de l'infini.

Il n'y a donc jamais d'exception au théorème pour une courbe ne touchant pas le plan de l'infini et ne rencontrant pas le cercle isotrope, quelles que soient d'ailleurs ses singularités à distance finie ou infinie.

Enfin, *dans tous les cas, la somme des arcs considérés dans l'énoncé du théorème général est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction*

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}$$
$$\times \left(\log \frac{F - \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \Phi\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)_0^1,$$

où le logarithme est pris entre les valeurs initiales et finales des coefficients de F *et de* Φ. Dans cette fonction, x, y, z, t sont les

[1] Il ne pourrait en être autrement que si les surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$ se coupaient suivant plusieurs courbes appartenant, sur l'une d'elles, à la même série que $\mathfrak{C}$. Ce cas exceptionnel se présente par exemple si l'une des surfaces est un cône et l'autre un plan arbitraire passant par son sommet.

coordonnées d'un point de $\mathcal{C}$ supposées exprimées en fonctions d'un paramètre λ.

10. *Remarque*. — Pour connaître avec quel signe chaque arc entre dans la somme du théorème précédent, il suffit de se rappeler que l'élément d'arc a été mis sous la forme

$$ds = \frac{F}{\Phi}\frac{dX}{A},$$

ce qui donne le signe de chaque arc infiniment petit, et par suite de chaque arc ou de chaque portion d'arc fini.

APPLICATIONS GÉNÉRALES.

Courbes gauches.

11. Pour faire des applications du théorème général, nous chercherons des surfaces de la forme $\mathcal{F}$ en relation géométrique simple avec la courbe $\mathcal{C}$, de manière à débarrasser l'expression du théorème de tout terme analytique; les exemples sont d'ailleurs faciles à trouver.

Considérons, sur la courbe $\mathcal{C}(f = 0,\ \varphi = 0)$ les points où la tangente fait un angle donné, ω, avec une droite fixe, l'axe des X, par exemple; ces points sont sur la surface

$$(12) \qquad A^2 - \cos^2\omega(A^2 + B^2 + C^2) = 0.$$

Lorsque $\cos\omega$ varie, les surfaces représentées par cette équation appartiennent au type $\mathcal{F}$, considéré dans le théorème général qui est dès lors applicable; mais il y a lieu ici de pousser les calculs jusqu'au bout.

D'après le n° **4**, si l'on pose $\cos\omega = u$, la somme des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre les surfaces du système (12) qui correspondent aux valeurs u_0 et u du paramètre a pour valeur

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r),$$

Σr désignant la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la

fonction

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t^2}\,\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 - u^2(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Soit λ_0 la valeur de λ qui correspond à un point à l'infini de $\mathfrak{S}$: nous supposerons que la courbe ne touche pas le plan de l'infini en ce point.

Tout d'abord si le plan $x = 0$ passe par le point λ_0, $\frac{x}{t}$ reste fini pour $\lambda = \lambda_0$, en vertu de l'hypothèse précédente; il en est de même de sa dérivée $\frac{x't - xt'}{t^2}$ et, par suite, de la fonction $\Theta(\lambda)$. Le résidu correspondant de cette fonction est donc nul.

Si le plan $x = 0$ ne passe pas par le point λ_0, on a, en posant $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon$, d'après (9) et (9 *bis*),

$$\frac{x}{t} = \frac{\alpha_0}{\varepsilon^p} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{p-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1}}{\varepsilon} + \alpha_p + \alpha_{p+1}\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{y}{t} = \mu\frac{x}{t} + b_0 + b_1\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{z}{t} = \nu\frac{x}{t} + c_0 + c_1\varepsilon + \ldots.$$

Pour calculer le résidu de $\Theta(\lambda)$, posons

$$\psi(\lambda) = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2} = \frac{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}{(x't - xt')^2}.$$

En vertu des équations qui précèdent et des équations qu'on en déduit par dérivation, on peut écrire

$$\psi(\lambda) = 1 + \mu^2 + \nu^2 + \frac{t^2}{x't - xt'}\rho$$

ou

$$\psi(\lambda) = 1 + \mu^2 + \nu^2 + \varepsilon^{p+1}\sigma,$$

ρ et σ ne devenant pas infinis pour $\varepsilon = 0$; μ et ν sont des constantes.

Cette dernière formule montre que les p premières dérivées de ψ sont nulles pour $\varepsilon = 0$; il en est, par suite, de même évidemment des p premières dérivées de la fonction

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{A^2 - u^2(A^2 + B^2 + C^2)} \quad \text{ou} \quad \frac{\psi}{1 - u^2\psi}.$$

Il en résulte immédiatement que le résidu, pour $\lambda = \lambda_0$, de la fonction

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t^2}\frac{\psi}{1 - u^2\psi}$$

est nul, puisque, d'une part, $\frac{x't - xt'}{t^2}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\xi^{p+1}}$, et que, d'autre part, il ne contient pas de terme en $\frac{1}{\xi}$.

On peut donc énoncer ce théorème :

I. *A une courbe algébrique douée de singularités quelconques, mais ne touchant pas le plan de l'infini* [1], *on mène toutes les tangentes qui font un angle donné avec un axe fixe et l'on fait ensuite varier cet angle : la somme algébrique des arcs parcourus par les points de contact des tangentes est à chaque instant égale à* zéro.

Ce théorème est une extension à l'espace d'une propriété connue dans le plan.

On établirait de même, sans difficulté, que :

II. *Le même théorème subsiste pour une courbe ayant avec le plan de l'infini, en un seul point, un contact de premier ordre, lorsque l'axe fixe est perpendiculaire aux plans* (*parallèles entre eux*) *qui touchent la courbe en ce point.*

12. Les points de $\mathcal{C}$ dont le plan normal touche la sphère de rayon u et de centre fixe $(0, 0, 0, 1)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - u^2t^2 = 0$$

sont sur la surface

$$\mathcal{F} = (Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

qui est du type $\mathcal{F}$. Pour calculer la somme des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre deux de ces surfaces, correspondant aux valeurs u_0 et u du rayon, nous calculerons encore directement les résidus, par rapport aux zéros

[1] C'est-à-dire n'ayant aucune tangente dans le plan de l'infini.

de t, de la fonction (5)

$$\Theta(\lambda) = -2\frac{x't - xt'}{t}\,\frac{(Ax + By + Cz)(A^2 + B^2 + C^2)}{A[(Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)]},$$

où A, B, C sont supposés remplacés par leurs valeurs proportionnelles $x't - xt'$, ... Au dénominateur, c'est seulement la première puissance de t qui est en facteur : cette circonstance permet de calculer de suite le résidu de $\Theta(\lambda)$ par rapport à un zéro quelconque, λ_0, de t, même si $\mathfrak{S}$ touche le plan de l'infini au point λ_0.

Si λ_0 est un zéro d'ordre q de t, n'annulant pas (comme on peut toujours l'admettre) x, y et z, dans le terme

$$\frac{x't - xt'}{t},$$

la partie infinie pour $\lambda = \lambda_0$ est $-qx_0\frac{1}{\lambda - \lambda_0}$, et le résidu de $\Theta(\lambda)$ est

$$r_0 = 2qx_0\left\{\frac{(Ax + By + Cz)(A^2 + B^2 + C^2)}{A[(Ax + By + Cz)^2 - u^2t^2(A^2 + B^2 + C^2)]}\right\}_0,$$

la valeur de l'expression entre crochets étant prise pour $\lambda = \lambda_0$. Si maintenant on suppose que, pour $\lambda = \lambda_0$, $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul, on voit que les termes de moindre degré en $\lambda - \lambda_0$ sont, au numérateur de cette expression

$$-(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2 t'^3$$

et au dénominateur

$$-x_0(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2 t'^3;$$

par suite,

$$r_0 = 2q.$$

La somme des résidus est ainsi égale à $2\Sigma q$, c'est-à-dire à deux fois l'ordre, N, de la courbe $\mathfrak{S}$, si celle-ci n'a pas de point sur le cercle isotrope. Alors la somme des arcs considérés, c'est-à-dire

$$\int_{u_0}^{u} du(\Sigma r).$$

est ici égale à $2N(u - u_0)$.

Ainsi :

III. *A une courbe algébrique, d'ordre* N, *ne rencontrant pas le cercle isotrope et d'ailleurs quelconque, on mène tous les plans normaux qui touchent une même sphère, et l'on fait ensuite varier le rayon de la sphère, son centre demeurant fixe : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est égale à* 2N *fois la variation du rayon de la sphère.*

Si un zéro simple, λ_0, de t (n'annulant pas simultanément x, y, z) est aussi un zéro simple de $x^2 + y^2 + z^2$, on établit sans difficulté que, pour $\lambda = \lambda_0$, $\Theta(\lambda)$ reste fini; le résidu correspondant est donc nul. Or, pour une courbe n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à branches distinctes et ne touchant pas le plan de l'infini, les zéros de t sont tous simples et réciproquement; dire que, en un de ces points, $x^2 + y^2 + z^2$ s'annule comme t, c'est admettre que la sphère de rayon nul $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ne touche pas la courbe au point considéré. Par suite :

IV. *A une courbe algébrique quelconque, d'ordre* N, *n'ayant sur le cercle isotrope que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes et ne touchant en aucun de ces points le plan de l'infini, on mène les plans normaux qui touchent une sphère et l'on fait varier le rayon de celle-ci, son centre demeurant fixe : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est égale à* $2(N - h)$ *fois la variation du rayon de la sphère,* $2h$ *étant le nombre des points d'intersection de la courbe et du plan de l'infini situés sur le cercle isotrope.*

Il faut de plus, pour que la proposition soit applicable, que les sphères concentriques considérées ne touchent pas toutes la courbe en un ou plusieurs points fixes à l'infini.

13. Menons maintenant ceux des plans normaux à $\mathfrak{S}$ qui touchent une sphère variable, de rayon fixe, dont le centre décrit une droite,

l'axe OX, par exemple : les points d'incidence de ces plans sont à l'intersection de Σ et de la surface

$$\mathcal{F} = [A(x - vt) + By + Cz]^2 - R^2 t^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

v désignant l'abscisse variable du centre de la sphère et R le rayon fixe. Pour évaluer la somme des arcs décrits sur Σ par les points d'incidence quand v varie, on peut partir des formules du n° **6**, puisque v figure seulement dans la fonction que nous avons appelée F; on a ainsi à calculer les résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\theta(\lambda) = -2R \frac{A^2 + B^2 + C^2}{\mathcal{F}} (x't - xt').$$

Au dénominateur, t a disparu : les résidus cherchés sont donc nuls, à moins que, pour un zéro, λ_0, de t, $\mathcal{F}$ ne s'annule quel que soit v, de manière que $\theta(\lambda)$ devienne infini. Or, en remplaçant, dans $\theta(\lambda)$, A, B, C par leurs valeurs proportionnelles $x't - xt'$, ..., on voit que, si pour $\lambda = \lambda_0$, $x^2 + y^2 + z^2$ n'est pas nul, les termes de moindre degré en $\lambda - \lambda_0$ sont au numérateur $2Rxt'^3(x^2 + y^2 + z^2)$, et au dénominateur $t'^2(x^2 + y^2 + z^2)$: la fonction $\theta(\lambda)$ reste donc toujours finie pour les zéros de t, et tous les résidus correspondants sont nuls. Donc :

V. *A une courbe algébrique ne rencontrant pas le cercle isotrope et d'ailleurs quelconque, on mène les plans normaux qui touchent une même sphère et l'on fait ensuite varier le centre de la sphère, le rayon demeurant constant : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'incidence des plans normaux est à chaque instant égale à zéro.*

De même on voit que :

La proposition précédente s'applique à une courbe n'ayant sur le cercle isotrope que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes, en aucun desquels elle ne touche le plan de l'infini.

14. D'une manière analogue on établit les propositions suivantes :

VI. *A une courbe algébrique d'ordre* N *ne rencontrant pas le cercle isotrope, on mène toutes les sphères orthogonales de rayon donné qui coupent une sphère fixe à angle droit, et l'on fait ensuite varier le rayon donné : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points d'orthogonalité des sphères mobiles est égale à* 4N *fois la variation du rayon.*

En particulier :

VII. *On considère sur la courbe les points pour lesquels la portion de la tangente comprise entre le point de contact et un plan fixe a une longueur donnée, que l'on fait ensuite varier : la somme algébrique des arcs décrits par les points considérés est égale à* 2N *fois la variation de cette longueur.*

15. Dans les applications précédentes, la courbe gauche intervient seule, indépendamment des surfaces qui la déterminent; voici un exemple où ces surfaces jouent un rôle intéressant.

Les points de la courbe $\mathcal{C}(f=0,\ \varphi=0)$ où les deux surfaces $f=0$, $\varphi=0$ se coupent sous un angle donné ω vérifient l'équation

$$\cos\omega = \frac{f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y + f'_z\varphi'_z}{\sqrt{(f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z)(\varphi'^2_x + \varphi'^2_y + \varphi'^2_z)}},$$

qu'on peut écrire

$$\mathcal{F} = (f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y + f'_z\varphi'_z)^2 - \cot^2\omega(A^2 + B^2 + C^2) = 0.$$

On a encore là, quand ω varie, des surfaces du type $\mathcal{F}$. Donc :

VIII. *Sur la courbe, intersection totale ou complète, mais non multiple, de deux surfaces algébriques, on considère les points où les deux surfaces se coupent sous un angle donné,* ω, *et l'on fait ensuite varier cet angle : la somme algébrique des arcs décrits sur la courbe par les points considérés est une fonction rationnelle de la cotangente de l'angle variable.*

C'est également une fonction rationnelle des coefficients des deux surfaces, dans les conditions spécifiées au n° **9**.

La proposition précédente peut ne pas être vraie pour une courbe rencontrant le cercle isotrope ou tangente au plan de l'infini, lorsque les conditions d'exception énoncées au n° **9** sont vérifiées; la somme des arcs s'exprime alors en fonction rationnelle et logarithmique de $\cot\omega$.

Il est aisé de donner l'expression de la somme des arcs, dans le cas où la courbe $\mathfrak{C}$ n'a, à l'infini, que des points simples ou multiples à branches distinctes, non situés sur le cercle isotrope, et en aucun desquels elle ne touche le plan de l'infini. Cette somme, d'après le théorème général du n° **9**, est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \left[\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}\right] \log \frac{F - \cot\omega\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \cot\omega\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

en posant, pour simplifier, $F = f'_x \varphi'_x + f'_y \varphi'_y + f'_z \varphi'_z$.

Par hypothèse, t n'a que des zéros simples, soit λ_0 l'un d'eux. Si l'on pose $\lambda - \lambda_0 = \varepsilon$, on sait (n° **8**) que le facteur entre crochets dans $\mathfrak{R}(\lambda)$ ne contient pas de terme en $\frac{1}{\varepsilon}$; le résidu cherché, ρ_0, est ainsi :

$$\rho_0 = \frac{1}{t_0'^2}\sqrt{t_0'^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}\,\frac{d}{d\lambda_0}\log\frac{F - \cot\omega\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{F + \cot\omega\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

En développant les calculs, on trouve sans difficulté

$$\rho_0 = m_0 \frac{\cot\omega}{\cot^2\omega - \cot^2\omega_0},$$

ω_0 étant l'angle sous lequel se coupent les deux surfaces au point λ_0, et m_0 un coefficient dont la valeur est

$$m_0 = 4\frac{x_0}{t'_0}\frac{d}{d\lambda_0}\left(\frac{F}{A}\right),$$

et dont il serait aisé d'écrire l'expression en fonction des coefficients qui figurent dans l'équation de la tangente (asymptote) à $\mathfrak{C}$ en ce point.

Ainsi, dans le cas examiné :

La somme des arcs considérés au théorème VIII est, à une constante près, qui dépend de l'angle initial,

$$\sum_i m_i \frac{\cot\omega}{\cot^2\omega - \cot^2\omega_i},$$

la somme s'étendant aux points à l'infini sur la courbe, ω_i *désignant l'angle des deux surfaces* $f = 0$, $\varphi = 0$ *en un de ces points, et* m_i *étant un coefficient indépendant de* ω, *dont la valeur a été donnée plus haut.*

16. Si l'on considère la courbe $\mathfrak{C}$ comme l'intersection de deux cônes, de sommets P et Q, on a, comme cas particulier du théorème VIII, la proposition suivante :

On mène, par chaque tangente d'une courbe gauche $\mathfrak{C}$ *les deux plans qui passent respectivement par deux points fixes* P *et* Q, *et l'on considère les points de* $\mathfrak{C}$ *où ces deux plans font un angle donné* ω : *quand on fait varier* ω, *les points considérés décrivent sur la courbe des arcs dont la somme algébrique est une fonction rationnelle de* $\cot\omega$.

Si la courbe touche le plan de l'infini, il faut, pour que le théorème s'applique, qu'aucune des tangentes situées dans ce plan ne touche le cercle isotrope ; si la courbe rencontre le cercle isotrope en des points α_i, il faut qu'aucun des plans menés par P (ou Q) et par la tangente en α_i ne touche le même cercle.

Sans insister davantage sur des exemples qu'il serait aisé de multiplier, nous passerons aux propriétés des arcs des courbes planes, en nous bornant aux applications qui sont spéciales à ces courbes.

Courbes planes.

17. Le théorème général du n° **9** peut être mis, dans le cas des courbes planes, sous une forme plus géométrique.

Rappelons d'abord une définition.

On nomme, dans le plan, *courbes de direction*, les courbes, dont l'équation, en coordonnées tangentielles rectangulaires, est de la forme

$$(\mathrm{D}) \qquad (\xi^2 + \eta^2)\Phi^2(\xi, \eta) - \mathrm{F}^2(\xi, \eta) = 0,$$

F et Φ désignant deux polynomes entiers, et l'équation cartésienne de la droite enveloppée étant

$$\xi \mathrm{X} + \eta \mathrm{Y} + 1 = 0.$$

Le premier membre de l'équation (D) peut d'ailleurs se décomposer en facteurs, dont chacun, égalé à zéro, représente une courbe de direction; dans tout ce qui suit, nous appellerons *courbe de direction* du type (D) la courbe ou l'ensemble des courbes représentées par une équation de la forme (D). C'est ainsi, par exemple, qu'une courbe de direction de classe impaire ne constituera pas à elle seule une courbe du type (D). Cela posé, observons que les points de contact des tangentes communes à la courbe (D) et à une courbe quelconque, $f(x, y, t) = 0$, sont à l'intersection de celle-ci et de la courbe

$$\frac{1}{f_t'^2}(f_x'^2 + f_y'^2)\Phi^2\left(\frac{f_x'}{f_t'}, \frac{f_y'}{f_t'}\right) - \mathrm{F}^2\left(\frac{f_x'}{f_t'}, \frac{f_y'}{f_t'}\right) = 0$$

qui appartient au type $\mathfrak{F}$.

Voici donc la conclusion :

Théorème général. — *La somme algébrique des arcs décrits sur une courbe plane, $\mathfrak{C}$, par les points de contact des tangentes communes à cette courbe et à une courbe de direction de classe donnée, du type* (D), *qui varie d'une manière quelconque, est une fonction rationnelle des coefficients de la courbe fixe et de la courbe variable.*

Les cas d'exception, d'après le n° **9**, ne peuvent être que les suivants :

1° La courbe $\mathfrak{C}$ et toutes les courbes de direction variables touchent la droite de l'infini;

2° La courbe $\mathcal{C}$ passe par les points cycliques, et les courbes variables admettent pour foyer un des foyers singuliers de $\mathcal{C}$ [1].

La somme algébrique des arcs se calculera par la formule générale du n° **9**; si l'on rend homogène l'équation (D) des courbes de direction, en l'écrivant

$$(\xi^2+\eta^2)\Phi^2(\xi,\eta,\zeta)-F^2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

cette somme est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\mathcal{R}(\lambda)=\frac{\sqrt{(x't-xt')^2+(y't-yt')^2}}{t^2}\log\frac{F(f'_x,f'_y,f'_t)-\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\,\Phi(f'_x,f'_y,f'_t)}{F(f'_x,f'_y,f'_t)+\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}\,\Phi(f'_x,f'_y,f'_t)},$$

où le logarithme est pris entre les valeurs initiales et finales des coefficients de F et de Φ, et où x, y, t sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{C}$, supposées exprimées en fonction d'un paramètre λ.

18. On peut donner une règle géométrique précise pour le signe à affecter aux arcs du théorème général précédent.

Rappelons d'abord que, sur une courbe de direction, la tangente a un sens déterminé : soit en effet la courbe

$$(\xi^2+\eta^2)\Phi^2(\xi,\eta,\zeta)-F^2(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

la tangente

$$\xi X+\eta Y+\zeta=0,$$

fait avec la droite OY, dirigée de O vers Y, un angle θ, tel que

$$\sin\theta=\frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}=\pm\frac{\eta\Phi}{F}.$$

Choisissons le signe + dans le second membre; on aura

$$\cos\theta=\cot\theta\sin\theta=-\frac{\xi}{\eta}\sin\theta=-\frac{\xi\Phi}{F}.$$

---

[1] Les foyers singuliers d'une courbe passant par les points cycliques I et J sont les points d'intersection d'une tangente en I à la courbe avec une tangente en J.

Nous dirons que le sens de la tangente est celui du rayon qui va de l'origine O au point de coordonnées $X = \sin\theta$, $Y = \cos\theta$.

Cela posé, menons les tangentes communes à la courbe $\mathcal{C}$ et à deux courbes de direction voisines (D_0) et (D); soient m_0 et m deux points de contact voisins sur $\mathcal{C}$, dont les coordonnées sont X_0, Y_0 (ou en coordonnées homogènes x_0, y_0, t_0) et $X_0 + dX_0$, $Y_0 + dY_0$.

D'après ce qui a été dit au n° **10**, on a, en grandeur et en signe,

$$\operatorname{arc} m_0 m = \frac{dX_0}{f'_{y_0}} \frac{F}{\Phi} (f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{t_0}).$$

La tangente à $\mathcal{C}$ au point m_0 est, par hypothèse, une tangente de la courbe (D_0), et son sens, par rapport à cette dernière, est déterminé : si θ_0 est son angle avec la semi-droite OY, on a

$$\sin\theta_0 = \frac{\tau_1 \Phi(\xi, \tau_1, \zeta)}{F(\xi, \tau_1, \zeta)} = f'_{y_0} \frac{\Phi}{F} (f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{t_0}).$$

La droite qui va du point m_0 au point m fait d'ailleurs, avec la semi-droite OY, un angle θ'_0, tel que

$$\sin\theta'_0 = \frac{dX_0}{\Delta s},$$

Δs étant le module de l'arc $m_0 m$. On a ainsi

$$\operatorname{arc} m_0 m = \Delta s \frac{\sin\theta'_0}{\sin\theta_0}.$$

Les quantités $\sin\theta'_0$ et $\sin\theta_0$ sont égales si la droite qui va de m_0 vers m a même direction que la tangente à la courbe de direction (D_0) qui touche $\mathcal{C}$ au point m_0; elles sont égales et de signe contraire si ces directions sont opposées, et l'arc $m_0 m$ a le signe $+$ ou le signe $-$ suivant l'hypothèse.

Donc enfin :

« Dans la somme algébrique des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre les points de contact des tangentes qui touchent respectivement deux courbes de direction voisines (D_0) et (D), un arc $m_0 m$ compris entre le point

de contact d'une tangente T_0, à la courbe (D_0), et le point de contact voisin d'une tangente à (D), sera pris positivement si le sens de l'arc $m_0 m$ (en allant de m_0 vers m) est le même que celui de la tangente T_0, considérée comme appartenant à la courbe de direction (D_0). Il sera pris négativement dans le cas contraire. »

19. La plus simple des courbes de direction du type (D) est le cercle; donc :

IX. *Les* 2N *points de contact des tangentes communes à une courbe algébrique de classe* N *et à un cercle décrivent sur la courbe, lorsque le cercle varie,* 2N *arcs dont la somme algébrique est une fonction rationnelle des coefficients de la courbe et du cercle.*

Il faut toutefois que les cercles variables n'aient pas tous pour centre un foyer singulier de la courbe fixe.

La somme des arcs considérés s'évalue simplement si la courbe fixe, $f(x, y, t) = 0$, ou $\mathfrak{S}$, n'a à l'infini que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes.

Soient

α, β les coordonnées du centre du cercle;
R son rayon;
α', β', R' les valeurs initiales de ces paramètres;

la somme cherchée est égale (n^{os} **9** et **17**) à la somme des résidus, par rapport aux zéros de t, de la fonction

$$\frac{\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2}}{t^2} \log \frac{\alpha f'_x + \beta f'_y + f'_t - R\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}}{\alpha f'_x + \beta f'_y + f'_t + R\sqrt{f'^2_x + f'^2_y}},$$

le logarithme étant pris entre les systèmes de valeurs α, β, R et α', β', R'.

Admettons d'abord que la courbe $\mathfrak{S}$ ne passe pas par les points cycliques du plan; soit λ_0 un zéro simple de t : pour des valeurs de λ voisines de λ_0 la fonction

$$\frac{1}{t^2}\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2}$$

est de la forme (n° **8**)

$$\frac{a}{(\lambda-\lambda_0)^2}+b+c(\lambda-\lambda_0)+\ldots,$$

a, b, ... étant des constantes. Le résidu cherché est donc égal au produit du facteur a par la dérivée du terme logarithmique, prise pour $\lambda=\lambda_0$.

Posons, pour abréger,

$$G=f'_x,\qquad H=f'_y,\qquad K=f'_t,\qquad L=\sqrt{f'^2_x+f'^2_y}$$

et désignons par G', ..., L' les dérivées de ces fonctions pour $\lambda=\lambda_0$. Le résidu est

$$2Ra\,\frac{\alpha(LG'-L'G)+\beta(LH'-L'H)+LK'-L'K}{(\alpha G+\beta H+K)^2-R^2(G^2+H^2)}.$$

Dans le numérateur de cette expression, les coefficients de α et de β sont nuls. On a vu en effet au n° **11** que la dérivée par rapport à λ de la fonction

$$\psi(\lambda)=\frac{A^2+B^2}{A^2}=\frac{f'^2_x+f'^2_y}{f'^2_y}$$

est nulle pour $\lambda=\lambda_0$. Or ici nous avons

$$\psi(\lambda)=\left(\frac{L}{H}\right)^2$$

et, comme $\frac{L}{H}$ n'est pas nul pour $\lambda=\lambda_0$, on a, pour cette valeur

$$LH'-L'H=0.$$

Le coefficient de β est donc nul, et il en de même de celui de α; si maintenant on observe que la quantité

$$\frac{\alpha G+\beta H+K}{\sqrt{G^2+H^2}}$$

n'est autre chose que la distance du point α, β à la tangente menée à $\mathcal{C}$ au point λ_0, c'est-à-dire à l'asymptote, on voit que le résidu est de

la forme

$$m_0 \frac{R}{R^2 - R_0^2},$$

R_0 étant la distance du point α, β à l'asymptote, et m_0 une quantité qui ne dépend que des éléments de la courbe $\mathfrak{S}$ au point à l'infini considéré.

Par suite la somme des arcs à évaluer est de la forme

$$\sum_i m_i \frac{R}{R^2 - R_i^2},$$

la somme s'étendant aux points à l'infini de la courbe $\mathfrak{S}$, m_i étant un coefficient spécial à chacun de ces points et R_i la distance du centre (α, β) du cercle mobile à l'asymptote correspondante. De plus, on devra retrancher de cette somme une somme analogue, où α, β, R sont remplacés par leurs valeurs initiales α', β', R'.

20. On peut calculer m_i directement.

En effet, au voisinage d'un point ordinaire à l'infini, pour des valeurs très grandes de X, l'équation de la courbe $\mathfrak{S}$ peut s'écrire

$$Y = gX + h + \frac{k}{X} + \frac{l}{X^2} + \ldots,$$

g, h, ... étant des constantes. La tangente au point (X, Y) est, en désignant par X', Y' les coordonnées courantes,

$$Y' = gX' + h + \frac{2k}{X} + \ldots.$$

Supposons que le cercle, de centre α, β et de rayon R, tende à devenir tangent à l'asymptote

$$Y' = gX' + h;$$

un des points de contact (X, Y) des tangentes communes au cercle et à $\mathfrak{S}$ tendra vers l'infini sur celle-ci, et l'on aura

$$R = \frac{-\beta + g\alpha + h + \frac{2k}{X} + \ldots}{\sqrt{1 + g^2}}, \qquad R_i = \frac{-\beta + g\alpha + h}{\sqrt{1 + g^2}};$$

d'où

$$m_i \frac{R}{R^2 - R_i^2} = \frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X + \ldots,$$

les termes négligés dans le second membre ne devenant pas infinis avec X. Par suite, dans l'expression de la somme des arcs décrits sur $\mathfrak{S}$ par les points de contact des tangentes qui touchent le cercle variable, le terme infini sera

$$\frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X.$$

D'un autre côté, l'arc limité sur $\mathfrak{S}$ au point X, Y a pour valeur principale, quand ce point s'éloigne à l'infini

$$\int dX\sqrt{1+\left(\frac{dY}{dX}\right)^2} = \int dX\sqrt{1+g^2-\frac{2gk}{X^2}} = X\sqrt{1+g^2}+\ldots,$$

les termes négligés restant finis pour X infini. On a donc

$$\frac{m_i}{4k}\sqrt{1+g^2}\,X = X\sqrt{1+g^2};$$

d'où

$$m_i = 4k.$$

La quantité k ainsi introduite est un *élément géométrique* de la courbe $\mathfrak{S}$, susceptible d'une définition simple. On voit aisément que k est la limite du produit $\delta\rho$, où δ désigne la distance d'un point de la courbe, qui s'éloigne à l'infini, à l'asymptote correspondante, et ρ la distance de ce point à un point fixe (quelconque d'ailleurs) du plan. Cette définition est indépendante du choix des axes de coordonnées.

Donc :

X. *Soit une courbe de classe* N, *ne touchant pas la droite de l'infini et n'ayant à l'infini que des points simples ou des points multiples à tangentes distinctes : les* 2N *points de contact des tangentes communes à cette courbe et à un cercle variable décrivent sur la courbe* 2N *arcs, dont la somme algébrique a pour expression*

$$\sum 4k_i\left(\frac{R}{R^2-R_i^2} - \frac{R'}{R'^2-R_i'^2}\right).$$

La somme s'étend à toutes les asymptotes de la courbe; R *et* R′ *désignent les rayons du cercle variable dans ses positions finale et initiale;* R_i *et* R'_i *sont les distances à une même asymptote du centre du cercle final et du centre du cercle initial;* k_i *est l'élément géométrique défini plus haut qui correspond à cette asymptote.*

Si la courbe passe par les points cycliques du plan, le théorème subsiste, car il conduit à une formule parfaitement déterminée : pour une asymptote isotrope, R_i et R'_i deviennent infinis, tandis que k_i garde une valeur finie; le terme correspondant à une branche cyclique est donc nul. En particulier :

La somme algébrique des arcs considérés au théorème X est nulle pour une courbe qui ne coupe la droite de l'infini qu'aux points cycliques.

Il faut toutefois, indépendamment des conditions restrictives du théorème X, que le centre du cercle ne soit pas un foyer singulier de la courbe.

21. *Remarque.* — Pour deux courbes planes ayant une asymptote commune, les quantités k correspondant à cette asymptote sont égales lorsque les deux courbes sont osculatrices entre elles à l'infini. D'ailleurs, pour une asymptote d'inflexion, k_i est nul. Donc :

La somme algébrique des arcs compris sur une courbe plane entre les points de contact des tangentes qui touchent deux cercles ne change pas si l'on substitue à la courbe proposée une quelconque des courbes de même ordre qui lui sont osculatrices en tous ses points à l'infini.

La somme considérée est nulle pour une courbe dont toutes les asymptotes sont inflexionnelles et distinctes.

22. On peut, dans certains cas, simplifier notablement l'énoncé des théorèmes IX et X.

Supposons en effet que le cercle initial soit de rayon nul, et que les points de contact des tangentes menées de son centre à la

courbe $\mathcal{C}$ soient tous réels; soit m un de ces points de contact. Augmentons maintenant le rayon du cercle, le centre demeurant fixe : il est clair que toutes les tangentes communes à $\mathcal{C}$ et au cercle seront réelles si le rayon est assez petit; deux points de contact de ces tangentes et de $\mathcal{C}$, n_1 et n_2, seront voisins de m et situés de part et d'autre de ce point. Il suffit d'appliquer la règle du n° **18** pour reconnaître que, dans la somme des arcs compris sur $\mathcal{C}$ entre les points de contact des tangentes qui touchent le cercle initial et le cercle final, les deux arcs mn_1 et mn_2 sont toujours pris avec le même signe, et peuvent dès lors être remplacés par l'arc $n_1 n_2$.

Par suite :

XI. *Soit une série de cercles concentriques, de rayon croissant de* o *à* R_0, *et tels que toutes les tangentes communes à l'un quelconque d'entre eux et à une courbe algébrique fixe* $\mathcal{C}$, *de classe* N, *soient réelles : les* 2N *points de contact des tangentes communes à* $\mathcal{C}$ *et à un de ces cercles, de rayon* R, *peuvent se grouper deux à deux de manière à déterminer, sur la courbe* $\mathcal{C}$, N *arcs dont la somme algébrique est rationnelle par rapport aux coefficients de la courbe et du cercle.*

Cette somme a pour expression

$$\sum_i 4k_i \frac{R}{R^2 - R_i^2},$$

k_i et R_i ayant la même signification que dans l'énoncé du théorème X (¹).

(¹) J'ai démontré, au LVIIe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, que cette somme est aussi égale à la somme algébrique des longueurs des tangentes communes au cercle et à la courbe, ces tangentes étant limitées à leurs points de contact.

Plus généralement, il serait aisé d'établir *a priori* que :

Si l'on mène les tangentes communes à une courbe algébrique plane et à un cercle et si l'on fait ensuite varier ce cercle, la somme algébrique des arcs

APPLICATIONS PARTICULIÈRES.

23. Dans le cas des *courbes unicursales*, l'application de la théorie générale peut être simplifiée.

Pour une courbe unicursale $\mathcal{C}$, d'ordre n, les coordonnées d'un point sont proportionnelles à quatre polynomes d'ordre n, fonctions d'une variable λ, et la différentielle de l'arc est de la forme

$$ds = \frac{\sqrt{P(\lambda)}}{Q(\lambda)}\, d\lambda,$$

P et Q étant des polynomes en λ, dont le premier est d'ordre $\frac{1}{2}(n-1)$. Ce polynome peut admettre des racines multiples; nous le mettrons sous la forme

$$P(\lambda) = R^2(\lambda)\, V(\lambda),$$

R et V étant des polynomes, dont le second n'a pas de racines multiples. Soit $2h$ le degré de $V(\lambda)$; si l'on désigne par $\Phi(\lambda)$ et $F(\lambda)$ deux polynomes en λ, le degré du second surpassant de h unités celui du premier, les points de la courbe $\mathcal{C}$, dont les arguments λ vérifient l'équation

$$V(\lambda)\Phi^2(\lambda) - F^2(\lambda) = 0,$$

décrivent sur $\mathcal{C}$, quand les coefficients des polynomes Φ et F varient d'une manière quelconque, des arcs dont la somme algébrique (n^{os} **4**, **9**) est égale à la somme des résidus, par rapport aux zéros

---

décrits sur la courbe par les points de contact est égale à la variation de la somme algébrique des longueurs des tangentes communes.

Je n'avais établi cette proposition que dans le cas où les cercles variables sont concentriques.

On pourrait voir également que le même théorème s'applique si l'on substitue au système de cercles un système de courbes de direction n'ayant, comme asymptotes à distance finie, que des asymptotes isotropes; par exemple un système des courbes que Laguerre nomme *hypercycles*. Il faut dans ce dernier cas que $\mathcal{C}$ ne touche pas la droite de l'infini.

de $t(\lambda)$, de la fonction

$$\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\sqrt{(x't - xt')^2 + (y't - yt')^2 + (z't - zt')^2}}{t^2}$$
$$\times \log \frac{F(\lambda) - \Phi(\lambda)\sqrt{V}}{F(\lambda) + \Phi(\lambda)\sqrt{V}}.$$

Cette somme est en général rationnelle, et les cas d'exception ne pourront se produire que si, pour un point de $\mathcal{C}$ situé sur le cercle isotrope ou pour un point de contact de $\mathcal{C}$ et du plan de l'infini, la fonction $\frac{\Phi^2 V}{F^2}$ a une valeur finie, non nulle.

Voici l'*énoncé géométrique* qu'on peut donner à cette proposition :

« Sur une courbe unicursale, d'ordre n, les points où la tangente est isotrope sont donnés par une équation d'ordre $4(n-1)$; ceux de ces points qui correspondent à des racines d'ordre impair de l'équation seront dits *points critiques* de l'arc de la courbe. »

XII. *Par les $2h$ points critiques de l'arc d'une courbe unicursale $\mathcal{C}$, on mène les surfaces Σ, de degré donné $2k$, qui touchent la courbe (avec un contact d'ordre impair) en chacun des autres points où elles la rencontrent : deux surfaces quelconques d'ordre $2k$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$, respectivement inscrites à deux surfaces Σ_1 et Σ_2, du système Σ, interceptent sur la courbe $\mathcal{C}$ des arcs dont la somme algébrique est rationnelle.*

Par surfaces d'ordre $2k$ inscrites à Σ, on entend les surfaces ayant une équation de la forme

$$\Sigma - F^2 = 0,$$

où F est un polynome en x, y, z, t, d'ordre k.

Le théorème s'applique naturellement à deux surfaces $\mathcal{F}$ inscrites à une même surface Σ.

24. *Cubique gauche générale.* — Il y a, sur une cubique gauche générale, $\mathcal{C}$, huit points distincts où la tangente est isotrope. Soit

$\Sigma = 0$ l'équation d'un cône du quatrième ordre ayant son sommet en un point quelconque de $\mathfrak{C}$, et passant par les huit points précédents : on sait qu'à un cône d'ordre 4 on peut inscrire 63 systèmes de cônes du second ordre, ayant même sommet que le proposé, et touchant celui-ci suivant quatre génératrices. Si $\mathcal{F}_0 = 0$ et $\mathcal{F} = 0$ sont les équations de deux cônes inscrits du même système, on a l'identité

$$\Sigma = \mathcal{F}_0 \mathcal{F} + F^2,$$

$F = 0$ étant l'équation d'un cône du second ordre, de même sommet. Ces propositions résultent de la théorie générale des courbes planes d'ordre 4.

On peut d'ailleurs mettre l'identité précédente sous la forme

$$\Sigma - (F + u\mathcal{F}_0)^2 = \mathcal{F}_0(\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0),$$

u étant un paramètre arbitraire. D'après les définitions du numéro précédent, les surfaces $\mathcal{F}_0(\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0) = 0$ sont inscrites à Σ, et, comme elles comprennent une surface fixe, $\mathcal{F}_0$, on n'a à considérer, pour appliquer le théorème XII, que les arcs décrits sur $\mathfrak{C}$ par les points d'intersection de cette courbe avec les cônes

$$\mathcal{F} - 2uF - u^2\mathcal{F}_0 = 0,$$

qui forment un des 63 systèmes de cônes quadriques inscrits à Σ. Par suite :

Étant donnée une cubique gauche, on considère un quelconque des cônes du quatrième ordre, Σ, qui ont leur sommet en un point de la cubique et qui passent par les huit points de cette courbe où la tangente est isotrope. Le cône Σ admet soixante-trois systèmes de cônes du second ordre, de même sommet, qui lui sont inscrits, c'est-à-dire qui le touchent suivant quatre génératrices : deux cônes inscrits d'un même système interceptent sur la cubique gauche quatre arcs dont la somme algébrique est rationnelle.

Ce théorème permet de trouver sur la cubique quatre arcs de somme rationnelle, quand on se donne un de ces arcs et l'origine de

chacun des trois autres; on retrouve d'ailleurs les mêmes arcs quel que soit le point de la cubique que l'on prenne pour sommet des cônes.

L'arc dépendant d'une intégrale hyperelliptique de genre 3, on ne peut trouver sur une cubique moins de quatre arcs *mobiles* ayant une somme rationnelle.

La réciproque du théorème précédent est vraie et s'établit aisément : si quatre arcs mobiles d'une cubique gauche ont une somme algébrique exprimable rationnellement, on les obtient par la construction indiquée [1].

25. *Cubique gauche parabolique.* — Une cubique qui touche le plan de l'infini est dite parabolique : en ce cas, sur les huit points où la tangente est isotrope, deux sont confondus avec le point de contact du plan de l'infini, et l'arc n'a que six points critiques. On établit, par la méthode du n° **24**, la proposition suivante :

Étant donnée une cubique gauche parabolique, on considère un quelconque des cônes du second ordre qui passent par les six points de la courbe (à distance finie) où la tangente est isotrope : deux plans tangents arbitraires de ce cône interceptent sur la cubique trois arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et rationnelles.

26. *Cubique gauche circulaire.* — C'est une cubique qui rencontre en deux points le cercle isotrope. Chacun de ces points compte pour deux dans le nombre des huit points où la tangente est isotrope, l'arc n'a que quatre points critiques :

Étant donnée une cubique gauche circulaire, on considère un

---

[1] Une proposition analogue existe pour une courbe unicursale d'ordre quelconque : si l'arc de cette courbe a $2h$ points critiques, on peut, d'après la théorie générale des intégrales hyperelliptiques, déterminer algébriquement sur cette courbe h arcs dont la somme s'exprime par les fonctions rationnelles et logarithmiques. Un de ces arcs et l'origine de chacun des $h-1$ autres peuvent être choisis arbitrairement. Mais le théorème ne paraît pas susceptible d'une interprétation géométrique simple. Dans le cas d'une courbe ne rencontrant pas le cercle isotrope et ne touchant pas le plan de l'infini, la somme des h arcs mobiles est toujours rationnelle.

quelconque des cônes du second ordre qui ont leur sommet en un point de la cubique et qui passent par les quatre points de la courbe (à distance finie) où la tangente est isotrope : deux plans tangents arbitraires de ce cône interceptent sur la cubique deux arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et algébriques.

L'arc lui-même s'exprime d'ailleurs par les intégrales elliptiques de première, deuxième et troisième espèces.

On a un théorème identique pour une cubique osculatrice au plan de l'infini.

Si en un point d'une cubique la tangente et le plan osculateur sont isotropes, ce point compte pour deux dans le nombre des points où la tangente est isotrope : le théorème précédent subsiste donc pour une cubique réelle douée de deux de ces points remarquables, mais alors la somme des deux arcs interceptés par deux plans tangents du cône est rationnelle ([1]).

27. *Cubiques planes.* — Voici deux propositions géométriques sur les arcs de ces courbes; les démonstrations découlent des principes posés plus haut :

Étant donnée une cubique plane générale, on considère une quelconque des courbes du quatrième ordre qui passent par les douze points de contact des tangentes menées à la courbe par les points cycliques du plan : deux coniques arbitraires d'un même système, inscrites à cette quartique, interceptent sur la proposée six arcs, dont la somme algébrique s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de la cubique et des deux coniques.

A une cubique circulaire unicursale on peut mener par les points cycliques quatre tangentes ayant leurs points de contact à distance

---

([1]) Il est clair que les propositions des n°s 24, 25, 26 donnent, sur une cubique gauche, des interprétations du théorème d'addition des intégrales hyperelliptiques de première espèce, de genres 3, 2 et 1. Dans le cas des intégrales de genre 2 (n° 25), on retrouve ainsi l'interprétation donnée par Laguerre (*Bulletin de la Soc. math.*, t. I).

finie, et il existe deux coniques passant par ces quatre points de contact et touchant la cubique en un nouveau point : deux tangentes arbitraires d'une de ces coniques interceptent sur la cubique trois arcs dont la somme s'exprime par les fonctions algébriques et logarithmiques.

28. *Courbes du quatrième ordre.* — Des propositions analogues s'appliquent à certaines courbes du quatrième ordre :

Sur une biquadratique sphérique générale il existe, à distance finie, huit points où la tangente est isotrope, et par lesquels passe une infinité simple de cônes du second ordre : deux plans tangents quelconques de l'un de ces cônes interceptent sur la biquadratique quatre arcs dont la somme s'exprime par les fonctions logarithmiques et algébriques.

Si la biquadratique a un point double A, *le théorème s'applique aux deux arcs interceptés par deux plans tangents de l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont leur sommet en* A *et qui passent par les quatre points de la courbe, à distance finie, où la tangente est isotrope.*

On énoncerait sans difficulté des propriétés de même nature pour les courbes planes bicirculaires du quatrième ordre, spécialement pour celles qui ont deux axes de symétrie.

La *lemniscate* est particulièrement intéressante :

Deux coniques quelconques ayant pour foyer le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe huit arcs dont la somme algébrique est nulle.

Deux tangentes quelconques d'un même cercle, doublement tangent à une lemniscate, interceptent sur cette courbe quatre arcs dont la somme algébrique est nulle.

Si deux arcs de lemniscate sont égaux, les quatre cercles qui passent par le centre et qui touchent respectivement la courbe aux extrémités des deux arcs, sont tangents à un même cercle; et réciproquement.

Cette dernière proposition peut être mise sous une forme plus élégante, et qui semble également nouvelle :

Deux cercles passant par le centre d'une lemniscate interceptent sur cette courbe deux arcs égaux, si leurs centres sont sur une même conique ayant pour foyers les foyers singuliers de la lemniscate.

On a ainsi une construction géométrique simple qui permet de porter sur la lemniscate, à partir d'un point, un arc égal à un arc donné de la courbe.

29. *Coniques.* — L'arc d'une conique générale a (n° **25**) quatre points critiques, qui sont les points de contact des tangentes isotropes; on voit de suite, comme au n° **26**, que :

Étant donnée une conique, deux tangentes quelconques d'une seconde conique, qui passe par les points de contact des tangentes isotropes menées à la première, interceptent sur celle-ci deux arcs dont la différence s'exprime rationnellement.

Si l'on transforme ce résultat par polaires réciproques en prenant pour directrice la première conique, on retrouve le théorème si connu de Graves :

Les polaires, par rapport à une conique, de deux points d'une seconde conique homofocale à la première interceptent sur celle-ci deux arcs, dont la différence s'exprime rationnellement.

En observant que les quatre tangentes menées à une conique par deux points d'une même conique homofocale touchent un cercle, on voit que le théorème de Graves est l'application aux courbes du second ordre de la proposition générale XI (n° **22**), et, calculant pour une conique les coefficients que nous avons appelés k_i, on arrive à ce résultat :

Étant donnée la conique $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0$, *rapportée à son centre et à ses axes, on mène les tangentes communes à cette courbe et à un cercle, de centre* α, β *et de rayon* R, *qui lui est extérieur : les*

quatre points de contact sur la conique peuvent se grouper deux à deux, de manière à former deux arcs, dont la différence a pour expression

$$\frac{8AB(A-B)R\alpha\beta}{[(A-B)R^2-A\beta^2+B\alpha^2]^2+4AB\alpha^2\beta^2}.$$

En passant de l'ellipse à la parabole par le procédé classique, on déduit de là que :

Les quatre points de contact des tangentes communes à une parabole, de paramètre p, et à un cercle extérieur, de rayon R, *peuvent se grouper deux à deux sur la parabole, de manière à former deux arcs, dont la différence est égale à* $\frac{8\beta R}{p}$, β *désignant la distance du centre du cercle à l'axe de la parabole.*

Appliquant à l'ellipse le théorème III (n° **12**) et raisonnant comme au n° **22**, on établit cette proposition assez simple :

Les huit pieds des normales qu'on peut mener à une ellipse, tangentiellement à un cercle intérieur à la développée de la courbe, se groupent deux à deux de manière à déterminer sur l'ellipse quatre arcs, dont la somme algébrique est égale à quatre fois le rayon du cercle.

Ce théorème, dans le cas particulier où le cercle est concentrique à l'ellipse, donne la propriété connue sous le nom de *théorème de Fagnano.*

Nous n'insisterons pas davantage sur les applications nombreuses qu'on pourrait faire aux coniques de nos propositions générales, et notamment des théorèmes des n^{os} **17** et **23**; ces applications n'offrent aucune difficulté.

Remarques diverses sur les fonctions abéliennes;

PAR M. H. POINCARÉ.

1. — Définitions.

Je considère un système de fonctions abéliennes de genre p dépendant des p variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

et admettant $2p$ périodes.

J'écrirai souvent pour abréger

$$F(u_i) \quad \text{ou} \quad F(u_i - e_i),$$

au lieu de

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) \quad \text{ou} \quad F(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots, u_p - e_p),$$

$e_1, e_2, \ldots, e_p$ étant des constantes quelconques.

Si $F(u_i)$ est une des fonctions abéliennes considérées et si l'on a

$$F(u_i) = F(u_i + a_i),$$

on dit que

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

est une période; on sait qu'on peut toujours supposer que l'on a choisi les variables *normales* et les périodes *normales* de sorte que le Ta-

bleau complet des $2p$ périodes s'écrive

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} 2i\pi, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & 2i\pi, & \ldots, & 0, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ 0, & 0, & \ldots, & 2i\pi, \\ a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,p}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,p}, \end{array}\right.$$

avec la condition

$$a_{i,k} = a_{k,i}.$$

Les p premières périodes du Tableau (1) seront les périodes de première espèce et les p dernières les périodes de seconde espèce.

Une fonction θ d'ordre n est une fonction entière qui jouit des propriétés suivantes :

1° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de première espèce (c'est-à-dire quand on change u_k par exemple en $u_k + 2i\pi$, les autres u_i ne changeant pas), la fonction θ est multipliée par un facteur constant, que j'appelle α_k;

2° Quand on augmente les u_i de la $k^{\text{ième}}$ période de seconde espèce, la fonction θ est multipliée par un facteur exponentiel de la forme

$$e^{nu_k+\gamma_k},$$

de sorte que

$$\theta(u_i + a_{ik}) = e^{nu_k+\gamma_k}\theta(u_i).$$

Les facteurs

$$\alpha_k \quad \text{et} \quad e^{nu_k+\gamma_k}$$

s'appelleront les *multiplicateurs*.

Si deux fonctions θ ont les mêmes multiplicateurs, on dira qu'elles appartiennent au même *faisceau*.

Il est bien connu que, dans un faisceau d'ordre n et de genre p, il y a

$$n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes dont toutes les autres fonctions θ du faisceau sont des combinaisons linéaires.

Parmi les fonctions θ il y en a une qui est particulièrement remarquable et que j'appellerai Θ.

C'est la fonction bien connue

$$\Sigma\, e^{m_1u_1+m_2u_2+\ldots+m_pu_p-\frac{1}{2}\Sigma_{ik}a_{ik}m_im_k},$$

qui est une fonction θ du premier ordre.

Le cas le plus simple est celui que j'appellerai le *cas singulier elliptique;* c'est celui où dans le Tableau (1) des périodes normales tous les a_{ik} sont nuls si $i \gtrless k$.

La fonction Θ est alors le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Vient ensuite le cas que j'appellerai *cas singulier abélien.* Il se présentera dans les circonstances suivantes.

Soit

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_q.$$

Prenons les p dernières lignes du Tableau (1), nous obtiendrons ainsi un Tableau à p lignes et p colonnes. Je suppose que tous les éléments de ce Tableau soient nuls, sauf :

1° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_1 premières lignes et aux p_1 premières colonnes;

2° Ceux qui appartiennent à la fois aux p_2 lignes suivantes et aux p_2 colonnes suivantes;

. . . . . .

Et enfin ceux qui appartiennent à la fois aux p_q dernières lignes et aux p_q dernières colonnes.

S'il en est ainsi la fonction Θ à p variables sera le produit de q fonctions Θ admettant respectivement $p_1, p_2, \ldots$ et p_q variables.

On sait comment les fonctions abéliennes ont été imaginées; on a considéré une courbe algébrique quelconque de genre p et les p intégrales abéliennes de première espèce correspondantes que j'appellerai $v_1, v_2, \ldots, v_p$; supposons alors qu'on prenne sur la courbe p points quelconques, qu'on considère une des intégrales abéliennes v_i, et qu'on fasse la somme Σv_i des valeurs de cette intégrale en ces p points.

Alors toute fonction symétrique des coordonnées de nos p points sera une fonction abélienne de

$$\Sigma v_1, \quad \Sigma v_2, \quad \ldots, \quad \Sigma v_p.$$

Mais on sait également que toutes les fonctions abéliennes ne peuvent pas être obtenues de cette manière.

Un système S de fonctions abéliennes de genre p dépend de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

constantes qui sont les périodes normales a_{ik}.

Une courbe algébrique de genre p, si l'on ne regarde pas comme distinctes deux courbes dérivées l'une de l'autre par une transformation birationnelle, ne dépend que de $3p-3$ constantes.

Ces deux nombres sont égaux pour $p=2$ et pour $p=3$; mais, pour $p>3$, le premier est plus grand; il existe donc des fonctions abéliennes qui n'ont pas pour origine une courbe algébrique de genre p.

J'appellerai fonctions abéliennes *spéciales* celles qui admettent cette origine.

2. — Zéros des θ.

Après ces préliminaires sur lesquels j'ai peut-être un peu longuement insisté, j'arrive à l'objet de mon travail qui est l'étude des zéros des fonctions Θ. Cette question a été abordée par deux voies très différentes; et par l'une comme par l'autre on a pénétré assez loin à l'intérieur du domaine inconnu qu'il s'agissait d'explorer; mais ces deux voies ne se sont pas encore rejointes, pour ainsi dire; c'est là le résultat que je voudrais atteindre, car je crois qu'il ne doit plus nous coûter qu'un léger effort.

Dans le Tome X du *Bulletin de la Société mathématique de France*, j'ai démontré le théorème suivant :

Soit p fonctions θ qui soient respectivement d'ordre

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p;$$

le nombre de leurs zéros communs sera

$$n_1 n_2 \ldots n_p (p!).$$

Bien entendu, je ne considère pas comme distincts deux zéros qui ne diffèrent que par des multiples des périodes.

Si en particulier l'on considère p fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau, le nombre de leurs zéros communs sera

$$n^p p!$$

Il en résulte que la relation algébrique qui existe entre $p+2$ fonctions θ d'ordre n, appartenant à un même faisceau, est d'ordre

$$n^p p!$$

ou d'ordre moindre; et il est aisé de vérifier ensuite qu'en général elle n'est pas d'ordre moindre.

Mais il ne sera peut-être pas sans intérêt de montrer comment on peut arriver au même résultat par un chemin entièrement différent.

Considérons donc $p+2$ fonctions θ d'ordre n appartenant à un même faisceau; soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}$ ces fonctions.

Considérons un polynome homogène et d'ordre m par rapport à ces $p+2$ fonctions θ.

Les coefficients arbitraires de ce polynome sont au nombre de

$$\frac{(m+p+1)!}{(m)!\,(p+1)!}.$$

Mais ce polynome sera une fonction θ d'ordre

$$mn,$$

et tous les polynomes ainsi obtenus seront des fonctions θ *appartenant au même faisceau.*

Or un faisceau de genre p et d'ordre mn ne peut contenir que

$$m^p n^p$$

fonctions θ linéairement indépendantes.

Il y a donc *au moins*

$$\varphi(m) = \frac{(m+p+1)!}{(m)!\,(p+1)!} - (m)^p n^p$$

de nos polynomes qui s'annulent et qui d'ailleurs sont linéairement indépendants.

Il y a donc *au moins*, entre nos $p+2$ fonctions θ d'ordre n, $\varphi(m)$ relations algébriques homogènes d'ordre m, linéairement distinctes.

Soit, d'autre part,

$$F(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+2}) = 0$$

celle de toutes les relations algébriques entre les $p+2$ fonctions θ dont le degré est le plus petit.

Soit q ce degré; c'est le nombre q qu'il s'agit de déterminer.

Toutes les autres relations algébriques homogènes entre les $p+2$ fonctions θ s'obtiendront en multipliant

$$F = 0$$

par un polynome quelconque homogène par rapport aux θ.

Nous pouvons maintenant répondre à la question suivante :

Combien y a-t-il entre les θ de relations algébriques et homogènes d'ordre $q+h$ linéairement distinctes?

Il y en aura autant que de polynomes homogènes d'ordre h linéairement indépendantes; car on obtiendra toutes ces relations en multipliant $F = 0$ par l'un de ces polynomes.

Il y aura donc entre les $p+2$ fonctions θ

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!}$$

relations algébriques homogènes d'ordre $q+h$ et il n'y en aura pas davantage.

Nous aurons donc, quel que soit le nombre h,

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!} \geqq \varphi(q+h)$$

ou bien

$$(1)\qquad \frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!} - \frac{(q+h+p+1)!}{(q+h)!\,(p+1)!} + (q+h)^p n^p \geqq 0,$$

ou bien

$$(1\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{(h+p+1)(h+p)\ldots(h+2)(h+1)}{(p+1)!} \\ &\quad - \frac{(q+h+p+1)(q+h+p)\ldots(q+h+1)}{(p+1)!} \\ &\qquad\qquad + (q+h)^p n^p \geqq 0. \end{aligned}\right.$$

Tous les termes du premier membre de (1) ou de (1 *bis*) sont des polynomes entiers en h.

Le premier terme

$$\frac{(h+p+1)!}{h!\,(p+1)!}$$

est un polynome d'ordre $p+1$ dont les deux premiers termes sont

$$\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}\,h^p.$$

Le second terme

$$-\frac{(q+h+p+1)!}{(q+h)!\,(p+1)!}$$

est un polynome d'ordre $p+1$ dont les deux premiers termes sont

$$-\frac{h^{p+1}}{(p+1)!} - \frac{qh^p}{p!} - \frac{(p+1)(p+2)}{2(p+1)!}\,h^p.$$

Enfin le troisième terme est un polynome d'ordre p dont le premier terme est

$$n^p h^p.$$

Il résulte de tout cela que les termes en h^{p+1} se détruisent et que le premier membre de (1) est un polynome d'ordre p en h dont le premier terme est

$$h^p\left(n^p - \frac{q}{p!}\right).$$

Comme le premier membre de (1) ne peut être négatif, quelle que soit la valeur positive ou nulle attribuée à l'entier h, le coefficient du terme en h^p ne peut pas être négatif, ce qui donne

$$q \leqq n^p p! \tag{2}$$

Il nous reste à faire voir qu'*en général* le nombre q n'est pas inférieur à $n^p p!$ c'est-à-dire qu'en général il n'existe pas entre nos $p+2$ fonctions θ de relation algébrique de degré plus petit que $n^p p!$

On peut présenter la chose dans un autre langage.

Envisageons les n^p fonctions θ d'un même faisceau de genre p et d'ordre n; considérons ces n^p fonctions θ comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Si nous donnons aux p variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$ toutes les valeurs possibles, ce point M va décrire une certaine variété V.

Cette variété V sera située dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions; elle aura elle-même p dimensions; elle sera algébrique; son degré sera au plus égal à $n^p p!$

Je me propose d'établir qu'en général ce degré n'est pas inférieur à $n^p p!$

3. — Cas singulier elliptique.

Pour cela, il me suffit de montrer qu'il en est ainsi dans un cas particulier; car, si la réduction du degré avait lieu en général, elle devrait avoir lieu aussi dans ce cas particulier.

Le cas particulier que je choisirai est celui que j'ai appelé *cas singulier elliptique*.

Voyons comment on peut dans ce cas former les n^p fonctions θ du faisceau.

Considérons un premier système de fonctions elliptiques dépendant de la variable u_1; formons avec cette variable u_1 un faisceau d'ordre n et de genre 1 de fonctions θ elliptiques. Soient

$$\theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n} \tag{1}$$

les n fonctions de ce faisceau.

Soient de même

$$(2) \qquad \theta_{2,1}, \quad \theta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{2,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_2, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Et ainsi de suite.

Soient enfin

$$(p) \qquad \theta_{p,1}, \quad \theta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{p,n}$$

n fonctions θ elliptiques de la variable u_p, formant un faisceau d'ordre n et de genre 1.

Cela posé, prenons une fonction dans le Tableau (1), une dans le Tableau (2), etc., et enfin une dans le Tableau (p). Faisons le produit de ces p fonctions; nous obtiendrons une fonction θ abélienne à p variables répondant au cas singulier elliptique.

Comme chacun des Tableaux (1), (2), ..., (p) contient n fonctions différentes, on obtiendra n^p fonctions θ abéliennes à p variables, linéairement indépendantes et formant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Ce sont ces n^p fonctions θ abéliennes que je regarde comme les coordonnées homogènes du point M qui engendre la variété V, dans l'espace à $n^p - 1$ dimensions.

Un premier point, fort important, est le suivant : pour que deux systèmes de valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ correspondent à un même point de V, il faut et il suffit que la différence de ces deux systèmes de valeurs soit une période.

En effet, pour que ces deux systèmes correspondent à un même point de V, il faut et il suffit :

1° Que les rapports des fonctions θ elliptiques

$$(1) \qquad \theta_{1,1}, \quad \theta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \theta_{1,n}$$

reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période;

2° Que les rapports des fonctions θ elliptiques (2) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_2 diffèrent d'une période, etc., et enfin que les rapports des fonctions θ elliptiques (p) reprennent les mêmes valeurs, c'est-à-dire que les deux valeurs de u_p diffèrent d'une période.

Il y a exception pour $n = 2$; dans ce cas, en effet, il n'y a dans le Tableau (1), par exemple, que deux fonctions elliptiques $\theta_{1,1}$, $\theta_{1,2}$ et le rapport de ces deux fonctions peut reprendre la même valeur, sans que les deux valeurs de u_1 diffèrent d'une période.

Pour évaluer le degré de la variété V, il faut la *couper* par une variété plane (c'est-à-dire algébrique et du premier degré) ayant $n^p - p - 1$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection. Une pareille variété plane, que nous pouvons d'ailleurs choisir arbitrairement, sera définie par p équations linéaires entre les coordonnées courantes.

Soient donc

$$\eta_{1,1}, \quad \eta_{1,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{1,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions θ elliptiques (1).

Soient de même

$$\eta_{2,1}, \quad \eta_{2,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{2,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (2), etc.

Soient enfin

$$\eta_{p,1}, \quad \eta_{p,2}, \quad \ldots, \quad \eta_{p,p}$$

p combinaisons linéaires des fonctions elliptiques (p).

Considérons les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{1,1}\,\eta_{2,1} \ldots \eta_{p,1} = 0, \\ \eta_{1,2}\,\eta_{2,2} \ldots \eta_{p,2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \eta_{1,p}\,\eta_{2,p} \ldots \eta_{p,p} = 0. \end{array} \right.$$

Les premiers membres seront des fonctions linéaires des n^p fonctions θ abéliennes de notre faisceau, c'est-à-dire des coordonnées courantes.

Les équations (3) définiront donc une variété plane P.

Il est aisé d'évaluer le nombre des solutions distinctes des équations (3) en ne considérant pas comme distincts deux systèmes de valeurs des u qui ne diffèrent que d'une période.

Cette évaluation est presque immédiate, et je l'ai déjà faite dans le Mémoire cité plus haut du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Le nombre des solutions est $n^p p!$

A chacune de ces solutions correspond, comme nous l'avons vu, un point de V et un seul.

Ainsi le nombre des points d'intersection de V et de P est égal à $n^p p!$

La variété V est donc du degré $n^p p!$

En résumé, le degré de la variété V ne peut s'abaisser que dans des cas exceptionnels.

Je ne m'arrêterai pas à rechercher quels sont ces cas exceptionnels. Je rappellerai seulement que le cas de $n = 2$ est toujours excepté et qu'il y a de cette exception un exemple bien connu.

Soit

$$p = 2, \; n = 2;$$

d'où

$$n^p p! = 8, \qquad n^p = 4;$$

dans ce cas la variété V se réduit à une surface dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Dans ce cas, le degré se réduit; et V est une surface de Kummer du quatrième degré.

4. — Théorèmes de Riemann.

Dans les deux numéros qui précèdent et dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, j'ai exposé un premier moyen d'étudier les zéros des fonctions θ. Mais il y en a un autre, entièrement différent et qui est dû à Riemann.

Il ne s'applique qu'aux fonctions abéliennes *spéciales*, au sens donné à ce mot dans le n° 1.

Considérons donc un système S de fonctions abéliennes spéciales,

c'est-à-dire devant leur existence à une courbe algébrique C de genre p.

A cette courbe appartiendront p intégrales abéliennes de première espèce

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

correspondant aux variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p.$$

Soit (x, y) un point de la courbe C; les v_i seront des fonctions de x et de y qui ne sont pas des variables indépendantes, mais qui sont liées par l'équation de la courbe.

On aura

$$v_i(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv_i.$$

dv_i est une fonction rationnelle bien déterminée de (x, y), de dx et de dy; mais v_i ne sera entièrement définie en fonction de x et de y (à une période près, bien entendu) que quand on se sera donné la limite inférieure d'intégration, c'est-à-dire le point (x_0, y_0).

Nous verrons un peu plus loin comment ce point (x_0, y_0) doit être choisi; mais je dis tout de suite que ce point ne sera pas le même, en général, pour les p intégrales

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_p,$$

de sorte qu'en général ces p intégrales ne pourront pas s'annuler à la fois.

Voici maintenant l'énoncé des théorèmes découverts par Riemann :

Considérons la fonction Θ définie plus haut, qui est paire et du premier ordre.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_p$ p constantes quelconques; formons l'équation

$$\Theta(v_i - e_i) = 0. \tag{1}$$

Comme les v_i sont des fonctions de x et de y, cette équation (1)

est une équation en x et y, définissant un point (x, y) de la courbe C. Comme y et x ne sont pas deux variables indépendantes, je dirai désormais, pour abréger le langage, le point x au lieu du point (x, y).

Riemann a démontré que cette équation (1) admet p solutions.

Soient

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(p)}$$

ces p solutions et soient

$$v_i^{(1)}, \quad v_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad v_i^{(p)}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i; Riemann a montré que l'on a

$$(2) \qquad e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)} + c_i$$

(les c_i étant des constantes indépendantes de $e_1, e_2, \ldots, e_p$), cela, bien entendu, à un multiple près des périodes.

Je dis maintenant qu'on peut choisir les limites inférieures d'intégration, de façon que les constantes c_i soient nulles.

Ces limites d'intégration, que j'ai appelées plus haut (x_0, y_0), sont restées jusqu'ici arbitraires.

Changer les limites d'intégration, c'est changer v_i en $v_i + h_i$, les h_i étant des constantes. Mais il faut en même temps changer e_i en $e_i + h_i$, de façon que $v_i - e_i$ ne change pas.

Quant aux

$$c_i = e_i - v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots - v_i^{(p)},$$

ils se changent en

$$c_i + (1 - p) h_i.$$

Il suffit donc de prendre

$$h_i = \frac{c_i'}{p - 1},$$

pour satisfaire à la question.

Nous pouvons donc toujours choisir les limites inférieures d'intégration de façon que les relations (2) s'écrivent

$$(2\,bis) \qquad e_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p)}.$$

Cette démonstration est en défaut quand le dénominateur $p-1$ s'annule; c'est-à-dire pour les fonctions elliptiques.

Dans ce cas, en effet, la relation (2),

$$e_i = \varphi_i^1 + c_i \qquad (i = 1)$$

ne peut pas se mettre sous la forme (2 *bis*) et c_i, quelle que soit la limite inférieure d'intégration, est égal à la demi-somme des périodes normales. On sait, en effet, que la fonction Θ elliptique s'annule quand la variable est égale à cette demi-somme.

Le théorème le plus important est le suivant :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = \varphi_i^{(1)} + \varphi_i^{(2)} + \ldots + \varphi_i^{(p-1)};$$

ou bien encore (ce qui revient au même) :

Pour que

$$\Theta(u_i) = 0,$$

il faut et il suffit que u_i puisse se mettre sous la forme

$$u_i = -\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)} - \ldots - \varphi_i^{(p-1)}.$$

Insistons un peu sur la signification de ce résultat.

Supposons, par exemple, $p = 3$ et considérons l'équation

$$\Theta(u_1, u_2, u_3) = 0.$$

Si nous regardons u_1, u_2, u_3 comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, cette équation représente une surface, et les équations de cette surface peuvent être mises sous la forme

$$u_1 = \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)},$$
$$u_2 = \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)},$$
$$u_3 = \varphi_3^{(1)} + \varphi_3^{(2)};$$

$c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_3^{(1)}$ sont fonctions d'une seule variable $x^{(1)}$; $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, c_3^{(2)}$ sont fonctions d'une seule variable $x^{(2)}$.

Il en résulte que notre surface peut être engendrée de la manière suivante : Une courbe se déplace d'un mouvement de translation sans se déformer et de telle façon qu'un de ses points décrive une courbe fixe. Une surface susceptible de ce mode de génération s'appelle une *surface de translation*.

Plus généralement, si l'équation

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_p) = 0 \tag{3}$$

admet une solution de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \varphi_1^{(1)}(t_1) + \varphi_1^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_1^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ u_2 = \varphi_2^{(1)}(t_1) + \varphi_2^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_2^{(p-1)}(t_{p-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_p = \varphi_p^{(1)}(t_1) + \varphi_p^{(2)}(t_2) + \ldots + \varphi_p^{(p-1)}(t_{p-1}), \end{array}\right. \tag{4}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ étant $p-1$ variables indépendantes; je dirai que l'équation (3) est *translative*.

Alors, d'après ce qui précède, l'équation

$$\Theta = 0$$

sera translative pour tout système de fonctions abéliennes *spécial* au sens donné à ce mot au n° **1**.

On peut alors se demander si cette propriété est encore vraie pour des fonctions abéliennes non spéciales.

Parmi les autres résultats obtenus par Riemann, je citerai seulement les suivants :

Un système de valeurs quelconque

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p$$

peut être toujours mis sous la forme

$$e_i = c_i^{(1)} + c_i^{(2)} + \ldots + c_i^{(p)},$$

et en général il ne peut l'être que d'une seule manière; pour que cela puisse se faire de plusieurs manières (et alors d'une infinité de manières), il faut et il suffit que

$$\Theta(v_i - e_i)$$

soit identiquement nulle; ou ce qui revient au même, il faut et il suffit qu'on puisse mettre les e_i sous la forme

$$e_i = -v_i^{(1)} - v_i^{(2)} - \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

Soit maintenant un système de valeurs

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_p$$

tel que

$$\Theta(r_i) = 0.$$

Les r_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$r_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

En général, cela n'est possible que d'une manière et il n'y a exception que si toutes les dérivées du premier ordre de Θ s'annulent en même temps que Θ.

5. — Extension du théorème de Riemann.

Considérons maintenant un faisceau d'ordre n et de genre p.

Soit θ une fonction de ce faisceau; formons l'équation

$$\theta(v_i) = 0. \tag{1}$$

En raisonnant tout à fait comme l'a fait Riemann, on verrait que cette équation (si elle n'est pas identiquement satisfaite) admet np solutions.

Soient

$$x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(np)}$$

ces np solutions, c'est-à-dire les np points de la courbe C qui satisfont à la question. Soient

$$v_i^{(1)}, \quad v_i^{(2)}, \quad \ldots, \quad v_i^{(np)}$$

les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Le raisonnement prouve encore que l'on a

$$(2) \qquad v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + \ldots + v_i^{(np)} = C_i,$$

les C_i étant des constantes qui sont les mêmes pour toutes les fonctions θ du faisceau.

Je dis que les équations (2) peuvent nous permettre de déterminer p des points $x^{(i)}$ quand on connaît les $(n-1)p$ autres.

En effet, considérons l'une quelconque des fonctions θ du faisceau et soient

$$(3) \qquad x_0^{(1)}, \quad x_0^{(2)}, \quad \ldots, \quad x_0^{(np)}$$

les np solutions correspondantes de l'équation (1); par les np points $x_0^{(i)}$ je fais passer une courbe adjointe quelconque H. Cette courbe H coupera la courbe C, en dehors des points doubles et des points $x_0^{(i)}$, en un certain nombre d'autres points que j'appelle

$$x_1^{(1)}, \quad x_1^{(2)}, \quad \ldots, \quad x_1^{(\mu)}.$$

Alors les équations (2) signifieront que les points $x^{(i)}$ et les points $x_1^{(k)}$ sont sur une même courbe adjointe de même degré que H.

Je puis toujours supposer que le degré de H est supérieur à celui de C diminué de trois unités. On sait que dans ce cas on peut choisir arbitrairement tous les points d'intersection, sauf p d'entre eux.

Par les μ points $x_1^{(k)}$ et par $(n-1)p$ des points $x^{(i)}$ je pourrai donc toujours faire passer une courbe adjointe de même degré que H et, en général, je n'en pourrai faire passer qu'une seule. Les p autres points $x^{(i)}$ se trouveront donc ainsi déterminés.

J'ai dit que dans un faisceau il y a n^p fonctions θ linéairement indépendantes. Le premier membre de l'équation (1) (si la fonction θ est

la plus générale du faisceau) contient donc n^p coefficients arbitraires que j'appellerai A et dont il dépend linéairement.

Disposons des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour $(n-1)p$ points donnés quelconques de la courbe C, à savoir

$$(4) \qquad x^{(1)}, \quad x^{(2)}, \quad \ldots, \quad x^{(np-p)},$$

il en résultera, d'après ce qui précède, qu'elle sera également satisfaite pour p autres points de la courbe C, à savoir

$$(5) \qquad x^{(np-p+1)}, \quad \ldots, \quad x^{(np)},$$

qui sont déterminés par les $(n-1)p$ premiers.

Disposons encore des A de telle façon que l'équation (1) soit satisfaite pour un autre point de C différent des points (4) et (5).

La fonction θ devrait alors s'annuler pour $np+1$ points différents, ce qui ne peut arriver que si elle est identiquement nulle.

Or nous avons introduit, entre les A, des relations linéaires au nombre de $np-p+1$; il reste donc

$$n^p + p - np - 1$$

coefficients A arbitraires.

Il existe donc dans notre faisceau $n^p + p - np - 1$ fonctions θ linéairement indépendantes et qui s'annulent identiquement quand on y remplace les variables indépendantes u_i par les intégrales v_i.

Cela peut se traduire dans un autre langage.

Reprenons la variété algébrique V définie au n° **3**. Je rappelle qu'elle est de degré $n^p p!$, qu'elle appartient à l'espace à $n^p - 1$ dimensions et qu'elle a elle-même p dimensions.

Considérons un point dont les coordonnées homogènes soient précisément les n^p fonctions $\theta(v_i)$; ce sera un point de la variété V.

Et quand le point x décrira la courbe C, ce point de la variété V décrira une certaine *courbe* (ou variété à une dimension) que j'appelle B.

Cette courbe B, qui fait partie de V, est de genre p comme la courbe C à laquelle elle correspond point par point.

Pour trouver son degré, il suffit de chercher le nombre de ses points d'intersection avec une variété plane à $n^p - 2$ dimensions; c'est-à-dire le nombre des solutions de l'équation (1).

Nous avons vu que ce nombre est égal à np : la courbe B est donc de degré np.

Enfin, d'après ce qui précède, il y a entre les coordonnées d'un point de B

$$n^p - np + p - 1$$

relations linéaires à coefficients constants. Ces relations définissent un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

La courbe B fait donc partie d'un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Soient par exemple $n = 2$, $p = 2$; d'où

$$n^p - 1 = 3, \qquad n^p p! = 8, \qquad (n-1)p = 2;$$

la variété V est alors une surface de Kummer du 4e degré dans l'espace ordinaire et la courbe B, qui sera du 4e degré, sera plane.

Considérons maintenant l'équation

$$\theta(v_i - e_i) = 0, \tag{6}$$

les quantités

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_p \tag{7}$$

étant p constantes quelconques. Elle jouira des mêmes propriétés que l'équation (1); la démonstration serait la même: elle est d'ailleurs inutile, car, si les fonctions $\theta(u_i)$ forment un faisceau, il en sera de même des fonctions $\theta(u_i - e_i)$.

Si donc les n^p fonctions $\theta(v_i - e_i)$ sont les coordonnées homogènes d'un point, ce point, quand x décrira la courbe C, décrira une certaine courbe B′ située sur V.

Cette courbe B′ sera de degré np, de genre p et sera située dans un espace plan à $(n-1)p$ dimensions.

Il y aura une p-uple infinité de courbes B′; par chaque point de V passera une infinité de ces courbes.

Deux de ces courbes en général ne se rencontreront pas ; les deux courbes correspondant à deux systèmes de valeurs,

$$e_i \quad \text{et} \quad e'_i,$$

des quantités (7) ne pourraient en effet se rencontrer que si l'on peut trouver deux points x et x' sur C tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i.$$

Cela n'arrivera pas en général sauf pour $p = 2$.

Nous savons toutefois que l'on peut trouver sur une variété V quelconque deux courbes B′ qui ont au moins un point commun, puisque par tout point de V passent une infinité de courbes B′. Mais on peut se demander si deux courbes B′ peuvent se rencontrer en deux points.

Pour cela il faudrait que l'on pût trouver sur C quatre points, x, x', x'', x''', tels que

$$e_i - e'_i = v_i - v'_i = v''_i - v'''_i;$$

d'où

$$v_i + v'''_i = v'_i + v''_i. \tag{8}$$

Une égalité telle que (8) est-elle possible?

Les théorèmes de Riemann énoncés à la fin du numéro précédent nous fourniront la réponse.

Si $p = 2$, l'égalité (8) est possible; nous pouvons supposer que la courbe C est une courbe du 4e ordre avec un point double. La condition pour que l'égalité (8) soit satisfaite, c'est alors que les points x et x''' d'une part, x' et x'' d'autre part soient en ligne droite avec le point double.

Si $p > 2$, l'égalité (8) ne serait possible que si la fonction Θ pouvait s'annuler en même temps que toutes ses dérivées du premier ordre. Or cela n'arrivera pas en général, je veux dire pour un système S quelconque de fonctions abéliennes.

Par conséquent on ne peut pas, en général, trouver sur la variété V deux courbes B′ qui se coupent en plus d'un point.

6. — Examen des cas singuliers elliptiques.

Voyons ce que deviennent ces résultats dans les cas singuliers et commençons par le cas singulier elliptique, où la fonction Θ est le produit de p fonctions Θ elliptiques.

Soit d'abord $p = 2$.

Considérons notre variété V de degré $2n^2$ et les courbes B de degré $2n$ tracées sur cette variété.

Considérons en particulier la courbe B.

Cette courbe peut être regardée comme définie par l'équation

$$u_i = c_i$$

ou bien

$$\Theta(u_i) = 0.$$

Dans le cas singulier elliptique on a

$$\Theta(u_i) = \Theta_1(u_1)\Theta_2(u_2),$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions Θ elliptiques; de sorte que l'équation de la courbe B se décompose en deux

$$\Theta_1(u_1) = 0, \qquad \Theta_2(u_2) = 0.$$

La première nous donne

$$u_1 = \alpha_1,$$

α_1 étant la demi-somme des périodes de la fonction Θ_1; la seconde nous donne de même

$$u_2 = \alpha_2.$$

La courbe B se décompose donc en deux autres, ayant respectivement pour équations

$$u_1 = \alpha_1, \qquad u_2 = \alpha_2.$$

Quel est le degré de chacune d'elles et en particulier de la courbe $u_1 = \alpha_1$?

Soit $\theta(u_i)$ une fonction quelconque du faisceau qui nous a servi à former la variété V; ce sera une fonction θ abélienne d'ordre n et de genre 2 qui sera une fonction linéaire à coefficients constants des n^2 fonctions θ fondamentales du faisceau; c'est-à-dire (avec le mode de représentation géométrique adopté pour la définition de la variété V) des coordonnées homogènes courantes dans l'espace à $n^2 - 1$ dimensions.

L'équation

$$\theta(u_i) = 0 \tag{1}$$

est donc celle d'une variable *plane* P à $n^2 - 2$ dimensions. Pour déterminer le degré de la courbe $u_1 = \alpha_1$, il faut chercher en combien de points elle coupe la variété P.

Or si l'on fait $u_1 = \alpha_1$ le premier membre de (1) devient une fonction θ elliptique d'ordre n par rapport à u_2; l'équation (1) admet alors n solutions.

La courbe $u_1 = \alpha_1$ est donc de degré n.

Ainsi la courbe B qui, dans le cas général, est de degré $2n$ et de genre 2, se décompose dans le cas singulier en deux courbes de degré n et de genre 1.

Il est clair qu'il en est de même de toutes les courbes B'.

Le cas de $n = 2$ est toujours excepté; examinons donc le cas de $n = 3$.

Dans le cas général, si $n = 3$, la courbe est du sixième degré et du genre 2; c'est une courbe gauche dans l'espace à $(n - 1)p = 4$ dimensions. Dans le cas singulier, elle se décompose en deux courbes du degré 3 et du genre 1 qui doivent être toutes deux planes. Ces deux courbes ont un point commun $u_1 = \alpha_1$, $u_2 = \alpha_2$.

Si nous projetons la courbe B sur un plan quelconque, la projection sera, dans le cas général, une courbe du sixième ordre avec huit points doubles; dans le cas singulier, elle se décomposera en deux cubiques se coupant en neuf points; elle acquerra donc un point double de plus.

Passons au cas de $p = 3$ et proposons-nous de trouver ce que devient la courbe B dans le cas singulier elliptique.

Cette courbe a pour équation

$$u_i = v_i$$

et doit satisfaire aux théorèmes de Riemann.

Il est clair que l'on peut satisfaire à ces théorèmes en supposant que la courbe B se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$(2) \qquad \begin{cases} u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}. \end{cases}$$

Par exemple,

$$(3) \qquad \Theta(v_i + v'_i) = \theta_1(v_1 + v'_1)\,\theta_2(v_2 + v'_2)\,\theta_3(v_3 + v'_3)$$

sera identiquement nul.

En effet, si la courbe B se décompose en trois autres définies par les équations (2), il est clair que deux des trois équations

$$v_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. De même deux des trois équations

$$v'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad v'_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad v'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

devront être satisfaites. Il en résulte que l'une des trois équations

$$v_i + v'_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

devra être satisfaite. Donc l'un des trois facteurs du second membre de (3) devra s'annuler. Donc

$$\Theta(v_i + v'_i) = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Malheureusement cette solution n'est pas unique. On satisfait également aux théorèmes de Riemann en supposant que la courbe B se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$(4)\qquad \begin{cases} u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2} + h, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2} - h, \\ u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \end{cases}$$

h désignant une constante quelconque.

Un examen plus approfondi est donc nécessaire.

Voici comment nous y procéderons. Ne nous supposons plus dans le cas singulier elliptique, mais dans un cas très voisin de ce cas singulier. Supposons, en d'autres termes, que, dans le Tableau (1) du n° **1**, les quantités

$$a_{ii}$$

(que j'appellerai *termes diagonaux*) sont finies, mais que les quantités

$$a_{ik} \qquad (i \gtrless k)$$

(que j'appellerai *termes latéraux*) sont infiniment petites du premier ordre sans être nulles.

Étudions maintenant la courbe définie par les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e'_i) = 0, \end{cases}$$

où les e_i et les e'_i sont six constantes quelconques. Cette courbe, que nous appellerons A, jouit de diverses propriétés.

Nous savons que, pour un choix convenable des constantes e_i et e'_i, elle se décompose en plusieurs autres, parmi lesquelles la courbe B (ou bien une courbe B').

Pour aborder l'étude de cette courbe A, observons que la fonction Θ dépend non seulement des u, mais des a_{ik}, et peut se développer sui-

vant les puissances de ces quantités. Nous allons effectuer le développement suivant les puissances des termes latéraux que nous avons supposés très petits. Nous avons

$$\Theta = \Sigma e^{m_1 u_1 + \ldots + m_p u_p - \frac{1}{2}\Sigma a_{ik} m_i m_k};$$

calculons les premiers termes du développement, à savoir ceux d'ordre 0 et d'ordre 1.

D'abord le terme d'ordre 0 s'obtiendra en annulant les termes latéraux a_{ik} $(i \gtrless k)$; on voit que la fonction Θ se réduit au produit de trois fonctions Θ elliptiques, à savoir

$$\Theta = \theta_1 \theta_2 \theta_3,$$

où

$$\theta_i = \Sigma e^{m_i u_i - \frac{a_{ii} m_i^2}{2}}.$$

Cherchons maintenant le coefficient de a_{23} par exemple.

Le terme général de Θ contient le facteur

$$e^{-a_{23} m_2 m_3}.$$

Si nous développons ce facteur suivant les puissances croissantes de a_{23}, il devient, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$1 - a_{23} m_2 m_3.$$

Le coefficient de a_{23} dans le développement de Θ sera donc

$$-\Sigma m_2 m_3 e^{\Sigma m_i u_i - \frac{a_{ii} m_i^2}{2}}$$

c'est-à-dire

$$-\theta_1 \theta'_2 \theta'_3.$$

Je pose, bien entendu,

$$\theta'_i = \frac{d\theta_i}{du_i}.$$

Ainsi les premiers termes du développement de Θ (en négligeant les

termes du second ordre) seront

$$(6) \qquad \Theta = \theta_1\theta_2\theta_3 - a_{23}\theta_1\theta'_2\theta'_3 - a_{13}\theta_2\theta'_1\theta'_3 - a_{12}\theta_3\theta'_1\theta'_2 + \ldots.$$

J'aurai à revenir dans la suite sur ce développement et à calculer les termes d'ordre supérieur. Ceux-ci me suffisent pour le moment.

Étudions l'équation

$$(7) \qquad \Theta = 0.$$

Comme les θ et leurs dérivées ne peuvent devenir infinis, Θ ne peut s'annuler que si le premier terme du développement (6)

$$\theta_1\theta_2\theta_3$$

est infiniment petit du premier ordre, sans quoi ce terme ne pourrait se détruire avec aucun autre.

L'un au moins des trois facteurs θ_1, θ_2, θ_3 doit être infiniment petit, c'est-à-dire que l'une au moins des trois quantités u_i doit être infiniment voisine de α_i (à une période près, bien entendu).

Comme je puis choisir deux d'entre elles arbitrairement, je supposerai que u_2 et u_3 aient des valeurs qui ne soient pas très voisines de α_2 et α_3, mais d'ailleurs quelconques.

Alors les deux facteurs θ_2 et θ_3 sont finis; et le facteur θ_1, de même que $u_1 - \alpha_1$, doit être un infiniment petit du premier ordre.

Le premier membre de l'équation (7) est développable suivant les puissances croissantes de

$$u_1 - \alpha_1, \quad a_{12}, \quad a_{23}, \quad a_{13}.$$

L'équation est satisfaite quand toutes ces quantités s'annulent.

Enfin le coefficient du terme en $u_1 - \alpha_1$ est égal à

$$\theta'_1(\alpha_1)\theta_2(u_2)\theta_3(u_3)$$

et ne s'annule pas puisque u_2 n'est pas égal à α_2 ni u_3 à α_3.

Donc, en vertu d'un théorème bien connu, l'équation (7) pourra être résolue par rapport à $u_1 - \alpha_1$, cette quantité étant développable suivant les puissances croissantes des termes latéraux a_{ik}.

Les premiers termes du développement, en négligeant ceux du second ordre, seront

$$(8) \qquad u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3} + \ldots.$$

Ce développement est valable quand les termes latéraux a_{ik} sont assez petits et quand u_2 n'est pas voisin de α_2, ni u_3 de α_3.

Donnons donc à u_2 et à u_3 des valeurs quelconques u_2^0 et u_3^0 que je suppose n'être pas très voisine de α_2 et de α_3; le développement (8) nous donnera la valeur correspondante u_1^0 de u_1 qui sera très voisine de α_1.

Puisque

$$\Theta(u_i^0) = 0,$$

nous pourrons poser

$$u_i^0 = v_i^0 + v_i^1,$$

où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de l'intégrale que j'ai appelée v_i, correspondant à deux points particuliers de la courbe C que j'appellerai x_0 et x_1.

Alors il existera deux courbes remarquables

$$u_i = v_i + v_i^1 \quad (\text{courbe } B_1),$$
$$u_i = v_i + v_i^0 \quad (\text{courbe } B_0).$$

Je dis que ce sont deux courbes; en effet v_i^1 et v_i^0 sont des constantes puisque je regarde les points x_0 et x_1 comme fixes; v_i est une fonction d'une seule variable indépendante, puisque cette intégrale dépend seulement du point x, mobile sur la courbe C.

Ces deux courbes B_0 et B_1 passeront toutes deux par les points

$$u_i = u_i^0 = v_i^0 + v_i^1.$$

Ce sont ces deux courbes que je me propose d'étudier en détail.

J'ai supposé que je faisais tendre les termes latéraux a_{ik} vers zéro; pour fixer les idées, je vais poser

$$a_{ik} = t\beta_{ik} \qquad (i \gtrless k),$$

les β_{ik} étant des constantes et t un paramètre que je vais faire tendre vers 0.

Écrivons alors l'équation (8) sous la forme

$$(8\ bis) \qquad u_1 = F(u_2, u_3);$$

le second membre se trouve développé suivant les puissances croissantes de t.

Désignons par

$$\frac{dv_i}{dx}, \quad \frac{d^2 v_i}{dx^2}$$

les dérivées de v_i par rapport à x et par

$$\frac{dv_i^0}{dx_0}, \quad \frac{d^2 v_i^0}{dx_0^2}, \quad \frac{dv_i^1}{dx_1}, \quad \frac{d^2 v_i^1}{dx_1^2}$$

les valeurs de ces dérivées pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.

Le long de la courbe B_0, on aura

$$dv_1^0 = \frac{dF}{du_2} dv_2^0 + \frac{dF}{du_3} dv_3^0.$$

Au point $u_i = u_i^0$ en particulier, on aurait

$$dv_1^0 = \frac{dF_0}{du_2} dv_2^0 + \frac{dF_0}{du_3} dv_3^0,$$

en appelant $\frac{dF_0}{du_i}$ la valeur de $\frac{dF}{du_i}$ pour $u_i = u_i^0$.

On en déduira

$$(9) \qquad dv_2^0\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + dv_3^0\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0.$$

On trouverait de même, pour la courbe B_1,

$$(10) \qquad dv_2^1\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + dv_3^1\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0.$$

Les équations (8), (9) et (10) suffiraient pour définir les courbes

B_0 et B_1 si l'on connaissait les deux constantes

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0}, \quad \frac{dv_3^1}{dv_2^1}.$$

Pour abréger l'écriture, je supposerai que v_3^0 a été exprimé en fonction de v_2^0 et v_2^1 en fonction de v_3^1 et je poserai

$$\frac{dv_3^0}{dv_2^0} = \xi, \qquad \frac{d^2 v_3^0}{dv_2^{0\,2}} = \xi',$$

$$\frac{dv_2^1}{dv_3^1} = \eta, \qquad \frac{d^2 v_2^1}{dv_3^{1\,2}} = \eta',$$

de sorte que les équations (9) et (10) s'écriront

$$(9\,bis) \qquad \left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \xi\left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0,$$

$$(10\,bis) \qquad \eta\left(\frac{dF}{du_2} - \frac{dF_0}{du_2}\right) + \left(\frac{dF}{du_3} - \frac{dF_0}{du_3}\right) = 0.$$

Cherchons à déterminer les deux constantes ξ et η.

Soient x et x' deux points quelconques mobiles sur la courbe C. v_i et v_i' les valeurs correspondantes de l'intégrale v_i.

Si l'on reprend alors l'équation (8) et qu'on y fasse

$$u_2 = v_2 + v_2',$$

$$u_3 = v_3 + v_3',$$

on aura aussi

$$u_1 = v_1 + v_1'.$$

Considérons v_1 et v_3 comme fonctions de v_2, v_1' et v_2' comme fonctions de v_3'.

Alors u_1, u_2 et u_3, et aussi $F(u_2, u_3)$, seront des fonctions des deux variables indépendantes v_2 et v_3'. On devra avoir

$$\frac{d^2 u_i}{dv_2\, dv_3'} = 0,$$

puisque

$$u_i = v_i + v_i',$$

dépendant seulement de v_2 et v_i' de v_3'.

Nous pourrons donc écrire, en tenant compte de (8),

$$(11)\qquad \frac{d^2 F}{dv_2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2^2\, dv'_3} = 0, \qquad \frac{d^3 F}{dv_2\, dv'^2_3} = 0, \qquad \frac{d^4 F}{dv_2^2\, dv'^2_3} = 0.$$

Les premiers membres des équations (11) s'expriment aisément à l'aide des dérivées de F par rapport aux u et des quatre dérivées

$$(12)\qquad \frac{dv_3}{dv_2}, \quad \frac{d^2 v_3}{dv_2^2}, \quad \frac{dv'_2}{dv'_3}, \quad \frac{d^2 v'_2}{dv'^2_3}.$$

Les équations (11) sont donc quatre relations entre les quatre dérivées (12). Si l'on y fait

$$v_i = v_i^0, \qquad v'_i = v_i^1,$$

elles deviendront quatre relations entre les quantités

$$\xi, \quad \xi', \quad \eta, \quad \eta'.$$

Ce sont ces quatre relations que nous appellerons les équations (13).

Nous tirerons ξ et η de ces équations (13) et les équations (9 *bis*) et (10 *bis*) nous feront connaître alors toutes les courbes B_0 et B_1.

Les premiers membres de toutes nos équations sont développées suivant les puissances de t; mais les équations (9) à (13) contiennent t en facteur et il convient de le faire disparaître; nous remplacerons donc les équations (9 *bis*), (10 *bis*) et (13) par les équations (9 *ter*)$_2$. (10 *ter*) et (13 *bis*) obtenues en divisant les premières par t.

Si nous supposons $t = 0$ ces équations vont prendre une forme très particulière. On a en effet, pour $t = 0$,

$$\frac{F - \alpha_1}{t} = \beta_{12}\frac{\theta'_2(u_2)}{\theta_2(u_2)} + \beta_{13}\frac{\theta'_3(u_3)}{\theta_3(u_3)}$$

et je puis observer que le second membre est la somme d'une fonction de u_2 et d'une fonction de u_3 que je puis écrire

$$f_2(u_2) + f_3(u_3).$$

Les premiers membres des équations (13 *bis*) sont alors des polynomes du deuxième degré au plus en ξ et η, du premier degré au plus en ξ' et η'.

Éliminant ξ' et η' entre les trois dernières équations (13 *bis*), il reste deux relations entre ξ et η, l'une du premier degré, l'autre du deuxième. Il semble donc que le problème comporte deux solutions. Mais ces deux solutions se confondent en une seule qui est

$$\xi = \eta = 0, \qquad \xi' = \eta' = 0.$$

Ainsi les équations (13 *bis*) comportent pour $t = 0$ une solution double et l'on en conclura que pour $t = 0$ le jacobien des premiers membres de ces équations par rapport aux quatre inconnues ξ, η, ξ', η', sera nul; d'où il résulte une petite difficulté.

Ne supposons plus $t = 0$; les premiers membres des équations (13 *bis*) sont développables suivant les puissances des inconnues et de t.

Si le jacobien dont je viens de parler n'était pas nul, nous pourrions, par un théorème bien connu de Cauchy, conclure que les inconnues ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t.

Ici je ne puis raisonner ainsi, mais comme la solution

$$\xi = \eta = \xi' = \eta' = 0$$

est *double* seulement, nous conclurons que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de $\sqrt{t}$; les développements commenceront par des termes du premier degré au moins en $\sqrt{t}$; et par conséquent infiniment petits au moins d'ordre $\frac{1}{2}$.

Un examen plus approfondi montrerait, je pense, que ξ, η, ξ', η' sont développables suivant les puissances de t, mais je ne l'ai pas vérifié. Cela ne m'est d'ailleurs pas nécessaire pour mon objet actuel.

Substituons la valeur de ξ ainsi trouvée dans l'équation (9 *ter*); le premier membre de cette équation sera développé suivant les puissances de $\sqrt{t}$ (le développement ne contiendrait vraisemblablement que des puissances paires).

Pour $t = 0$, ξ devient nul et l'équation (9 *ter*) se réduit à

$$\beta_{12}\left[\frac{\theta_2'}{\theta_2}(u_2) - \frac{\theta_2'}{\theta_2}(u_2^0)\right] = 0$$

ou à

$$u_2 = u_2^0.$$

On peut alors, d'après le théorème de Cauchy, résoudre l'équation (9 *ter*); on trouve u_2 développé suivant les puissances croissantes de $\sqrt{t}$ et de $u_3 - u_3^0$; pour $t = 0$, u_2 se réduit à u_2^0.

D'où l'équation de la courbe B_0.

$$(14)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{12}\dfrac{\theta_2'}{\theta_2}(u_2^0) + \beta_{13}\dfrac{\theta_3'}{\theta_3}(u_3)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_2 = u_2^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Je désigne par ht^k un ensemble de termes procédant suivant les puissances entières de $\sqrt{t}$ et commençant par un terme en t^k.

On aurait de même, pour l'équation de la courbe B_1.

$$(15)\qquad \begin{cases} u_1 = \alpha_1 + t\left[\beta_{12}\dfrac{\theta_2'}{\theta_2}(u_2) + \beta_{12}\dfrac{\theta_3'}{\theta_3}(u_3^0)\right] + ht\sqrt{t}, \\ u_3 = u_3^0 + h\sqrt{t}. \end{cases}$$

Considérons maintenant une courbe remarquable que je vais appeler B et qui a pour équation

$$u_i = 2c_i.$$

Supposons que le point u_i^0 soit un point de cette courbe; on aura alors

$$c_i^0 = c_i^1$$

et la courbe B_1 devra se confondre avec B_0. La comparaison des équations (14) et (15) montre que ces deux courbes ne peuvent se confondre; à moins toutefois que les développements (14) et (15) ne soient pas valables. Or nous avons vu qu'ils ne cessent de l'être que si u_2 est voisin de α_2 et u_3 de α_3.

Ainsi en un point de B' la fonction Θ devant s'annuler, l'un des u_i devra être très voisin de α_i; soit par exemple u_1 très voisin de α_1, ce qui nous conduit à l'équation (8); alors, d'après ce que nous venons de voir, u_2 devra encore être très voisin de α_2 ou u_3 de α_3.

En un point de B', deux des u_i devront donc être très voisins de α_i; en résumé, dans le cas singulier elliptique, la courbe B' se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$u_2 = \alpha_2, \qquad u_3 = \alpha_3,$$
$$u_1 = \alpha_1, \qquad u_3 = \alpha_3,$$
$$u_1 = \alpha_1; \qquad u_2 = \alpha_2.$$

Il est aisé d'en déduire ce qui arrive pour la courbe B qui a pour équation

$$u_i = c_i.$$

Elle se décompose en trois autres ayant respectivement pour équations

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$
$$u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$
$$u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad u_2 = \frac{\alpha_2}{2}.$$

Voyons maintenant quel est le degré de chacune d'elles.

Soit $p = 3$, $n > 2$; la courbe B est, en général, d'ordre $3n$ et de genre 3; dans le cas singulier elliptique, elle se décompose en trois courbes d'ordre n et de genre 1.

On arriverait au même résultat dans le cas de $p = 4$. Si les *termes latéraux* tendent vers 0, de façon que les fonctions abéliennes restent spéciales (je suis obligé d'ajouter cette restriction parce que, pour $p > 3$, les fonctions ne sont pas toujours spéciales; d'ailleurs, si elles ne l'étaient pas, la courbe B cesserait d'exister), la courbe B se décompose à la limite en quatre autres qui sont de degré n ($n > 2$) et

de genre 1 et qui ont respectivement pour équations

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}, \qquad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}, \qquad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \qquad u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \qquad u_4 = \frac{\alpha_4}{3},$$

$$u_1 = \frac{\alpha_1}{3}, \qquad u_2 = \frac{\alpha_2}{3}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{3}.$$

7. — Généralisation du théorème de Riemann.

Proposons-nous maintenant le problème suivant : Riemann a montré combien l'équation

$$(1) \qquad \Theta(v_i - e_i) = 0$$

admet de solutions; proposons-nous les deux équations simultanées

$$(2) \qquad \begin{cases} \Theta(v_i + v'_i - e_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i - e'_i) = 0, \end{cases}$$

où les e_i et les e'_i sont $2p$ constantes quelconques et où nous avons deux inconnues, à savoir les points x et x' de la courbe C qui correspondent aux intégrales v_i et v'_i.

Cherchons combien ces équations admettent de solutions.

De même, considérons les trois équations simultanées suivantes (avec trois inconnues x, x' et x''),

$$(3) \qquad \begin{cases} \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e'_i) = 0, \\ \Theta(v_i + v'_i + v''_i - e''_i) = 0. \end{cases}$$

Plus généralement, envisageons q équations simultanées à q inconnues,

$$(4) \qquad \Theta(v_i + v'_i + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q).$$

Combien ces équations admettront-elles de solutions?

On peut, dans l'évaluation du nombre de ces solutions, se placer à deux points de vue différents.

Au premier point de vue, nous ne regarderons pas comme distinctes deux solutions que l'on déduit l'une de l'autre en permutant les q points inconnus de la courbe C,

$$x, \quad x', \quad \ldots, \quad x^{(q-1)},$$

et, par conséquent, les q intégrales correspondantes

$$v_i, \quad v_i', \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Au second point de vue, on regardera ces deux solutions comme distinctes.

Il est clair que le nombre des solutions, évalué au second point de vue, sera $q!$ fois plus grand que le nombre des solutions évalué au premier point de vue.

Il y a deux cas où nous savons faire cette évaluation.

C'est d'abord celui où $q = 1$, celui de l'équation (1) : c'est celui de Riemann.

Le nombre des solutions est alors égal à p.

C'est ensuite celui où $q = p$; si l'on a les équations

$$(5) \qquad \Theta(u_i - v_i^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

j'ai démontré, comme je l'ai rappelé au début de ce travail, que le nombre des solutions est égal à $p!$.

D'un autre côté, les u_i peuvent toujours être mis sous la forme

$$u_i = v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(p-1)},$$

et cela d'une seule manière (en général du moins d'après les théorèmes de Riemann) ; d'une seule manière, veux-je dire, si l'on se place au premier point de vue et de $p!$ manières différentes si l'on se place au second point de vue.

Si donc $q = p$, le nombre des solutions des équations (4) est égal à $p!$ au premier point de vue, à $(p!)^2$ au second point de vue.

Le problème est donc résolu dans les deux cas extrêmes $q = 1$, $q = p$; pour traiter les cas intermédiaires, je vais employer la même méthode dont j'ai fait usage pour les équations (5) dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*. Cette méthode consiste à évaluer le nombre des solutions dans le cas singulier elliptique; ce nombre étant constant sera encore le même dans le cas général.

Soit d'abord $p = 3$, $q = 2$; dans le cas singulier elliptique on aura

$$\Theta = \theta_1(u_1)\,\theta_2(u_2)\,\theta_3(u_3).$$

Soient alors

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3; \quad e'_1, \quad e'_2, \quad e'_3$$

six constantes quelconques; posons, pour abréger,

$$\theta_i(e_i + e'_i - e_i) = \theta_i,$$
$$\theta_i(e_i + e'_i - e'_i) = \theta'_i.$$

Les équations (4) s'écriront alors

$$(4\,bis) \qquad \begin{cases} \theta_1\theta_2\theta_3 = 0, \\ \theta'_1\theta'_2\theta'_3 = 0. \end{cases}$$

En général, on aura

$$e_1 \gtrless e'_1, \qquad e_2 \gtrless e'_2, \qquad e_3 \gtrless e'_3,$$

de sorte que θ_1 ne pourra pas s'annuler en même temps que θ'_1, ni θ_2 en même temps que θ'_2, ni θ_3 en même temps que θ'_3.

Un des facteurs θ_i devra s'annuler ainsi qu'un des facteurs θ'_i; mais ces deux facteurs ne pourront être de même indice.

Nous pourrons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de trois lettres, deux à deux, c'est-à-dire six. Adoptons une quelconque de ces hypothèses, par exemple

$$\theta_1 = \theta'_2 = 0.$$

Pour aller plus loin, il faut se rappeler ce que devient dans le cas singulier elliptique la courbe B qui a pour équation $u_i = c_i$; elle se décompose et l'on doit avoir : soit

$$c_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c_3 = \frac{\alpha_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 1)},$$

soit

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c_3 = \frac{\alpha_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 2)},$$

soit

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c_2 = \frac{\alpha_2}{2} \qquad \text{(hypothèse 3)}.$$

De même en ce qui concerne c'_i, on doit avoir : soit

$$c'_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c'_3 = \frac{\alpha_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 4)},$$

soit

$$c'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c'_3 = \frac{\alpha_3}{2} \qquad \text{(hypothèse 5)},$$

soit

$$c'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c'_2 = \frac{\alpha_2}{2} \qquad \text{(hypothèse 6)}.$$

On peut combiner les hypothèses 1, 2, 3 avec les hypothèses 4, 5, 6, ce qui fait en tout neuf combinaisons; la plupart doivent être rejetées.

On ne peut pas avoir à la fois

$$c_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c'_2 = \frac{\alpha_2}{2},$$

car alors

$$\theta'_2 = \theta_2(\alpha_2 - e'_2)$$

ne serait pas nul en général. Cela exclut les combinaisons

$$(1, 4), \quad (1, 6), \quad (3, 4), \quad (3, 6).$$

On ne peut pas avoir non plus à la fois

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c'_1 = \frac{\alpha_1}{2}.$$

Cela exclut les combinaisons

$$(2, 5), \quad (2, 6), \quad (3, 5).$$

Il ne reste que deux combinaisons

$$(1, 5) \quad \text{et} \quad (2, 4).$$

Adoptons la première, les équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta'_2 = 0$$

deviennent

$$\theta_1\left(c_1 + \frac{\alpha_1}{2} - e_1\right) = 0,$$

$$\theta_2\left(c'_2 + \frac{\alpha_2}{2} - e'_2\right) = 0,$$

d'où, enfin,

$$c_1 = e_1 + \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c_3 = \frac{\alpha_3}{2},$$

$$c'_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c'_2 = e'_2 + \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c'_3 = \frac{\alpha_3}{2}$$

(une solution et une seule). La combinaison (2, 4) nous donnerait une autre solution.

Chacune de nos six hypothèses nous donne donc deux solutions; cela fait douze solutions *au second point de vue* et six au premier point de vue.

Raisonnons de la même manière pour des valeurs quelconques de p et de q; plaçons-nous encore dans le cas singulier elliptique. Le premier membre de chacune des q équations (4) sera le produit de p facteurs.

Dans chacun de ces produits, un des p facteurs devra s'annuler; mais, pour la même raison que plus haut, les q facteurs qui s'annuleront devront être d'un indice différent.

Nous pouvons donc faire autant d'hypothèses qu'il y a d'arrangements de p lettres q à q, soit

$$\frac{p!}{(p-q)!}.$$

Adoptons une de ces hypothèses; les q équations (4) seront remplacées par q équations plus simples de la forme

$$(6) \qquad \theta_i(v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(q-1)} - e_i^k) = 0,$$

où i prendra q valeurs différentes comprises entre 1 et p, pendant que k prendra les valeurs $1, 2, \ldots, q$; à chaque valeur de k correspond une valeur de i et une seule.

Cela posé, la courbe B se décompose; nous pouvons donc faire p hypothèses différentes au sujet des v_i; ces hypothèses peuvent se résumer dans la proposition suivante :

Les p quantités v_i devront être égales à $\frac{\alpha_i}{p-1}$, *excepté une d'entre elles.*

La même chose est vraie des quantités

$$v_i', \quad v_i'', \quad \ldots, \quad v_i^{(q-1)}.$$

Les p quantités $v_i^{(k)}$ (où k a une valeur donnée et où i prend les valeurs $1, 2, \ldots, p$) devront être égales à $\frac{\alpha_i}{p-1}$, excepté une d'entre elles.

Formons un Tableau à p colonnes et q lignes, de telle façon que l'élément de la $i^{\text{ième}}$ colonne et de la $k+1^{\text{ième}}$ ligne soit $v_i^{(k)}$: dans chaque ligne un élément et un seul ne devra pas être égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Il y a donc dans le Tableau q éléments et il n'y en a que q qui ne sont pas égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$.

Distinguons les colonnes de ce Tableau en deux catégories; nous rangerons dans la première catégorie les colonnes dont l'indice figure parmi les indices i des équations (6). Il y aura donc q colonnes de la première catégorie et $p-q$ de la deuxième.

Je dis que dans une colonne de la première catégorie il y a un élément qui n'est pas égal à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; car, s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$v_i + v_i' + v_i'' + \ldots + v_i^{(q-1)} = \frac{q\alpha_i}{p-1},$$

et, en général, c'est-à-dire pour une valeur quelconque de e_i^k, on

n'aurait pas

$$\theta_i(c_i + c_i' + \ldots + c_i^{q-1} - c_i^k) = 0.$$

Dans chaque colonne de la première catégorie, il y a donc un élément différent de $\frac{\alpha_i}{p-1}$; je dis qu'il n'y en a qu'un dans chaque colonne; en effet, il y en a un dans chacune des q colonnes de la première catégorie et il n'y en a que q dans tout le Tableau.

Ainsi, en supprimant les $p-q$ colonnes de la deuxième catégorie, il nous restera un Tableau à q lignes et q colonnes; tous les éléments, sauf q éléments singuliers, seront égaux à $\frac{\alpha_i}{p-1}$; dans chaque ligne et dans chaque colonne il y aura un élément singulier et un seul.

Nous pouvons donc faire, au sujet de la position des éléments singuliers $q!$ hypothèses différentes.

A chacune d'elles correspond une solution des équations (6) et, par conséquent, une solution des équations (4).

Chacune des $\frac{p!}{(p-q)!}$ hypothèses faites au début avant la formation des équations (6) nous donnera donc $q!$ solutions des équations (4).

En résumé, les équations (4) admettent (aussi bien dans le cas général que dans le cas singulier elliptique)

$$\frac{p!\,q!}{(p-q)!} \quad \text{solutions.}$$

Cela au second point de vue. Au premier point de vue, le nombre des solutions est

$$\frac{p!}{p-q!},$$

autant que d'arrangements de p lettres q à q.

Dans le cas de $q = 1$ (cas de Riemann), ce nombre d'arrangements est égal à

$$\frac{p!}{p-1)!} = p.$$

C'est le résultat de Riemann.

Dans le cas de $q = p$, ce nombre d'arrangements est celui des per-

mutations de p lettres, c'est-à-dire $p!$. C'est le résultat que j'ai obtenu dans le Mémoire cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*.

Ainsi se trouvent réunis dans une formule plus compréhensible le résultat de Riemann et le mien. Un chemin est frayé entre les deux domaines précédemment conquis et le but que je me proposais au début de ce travail est en partie atteint.

Considérons encore le cas de $q = p - 1$.

Les équations (4) sont alors équivalentes aux suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} \Theta(u_i) = 0, \\ \Theta(u_i - e_i^{(k)}) = 0 \end{cases}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p-1).$$

En effet, l'équation $\Theta(u_i) = 0$ équivaut à

$$u_i = v_i + v_i' + \ldots + v_i^{(p-2)}.$$

Or les équations (7) admettent $p!$ solutions.

Les équations (4) doivent donc avoir aussi, au premier point de vue, $p!$ solutions.

Et, en effet,

$$\frac{p!}{p-q)!} = \frac{p!}{1!} = p!.$$

8. — Décomposition de la courbe A.

Au n° **6**, j'ai défini par les équations (5) une certaine courbe que j'ai appelée A; je transcris ces équations en leur donnant le n° (1),

$$(1)\qquad \begin{cases} \Theta(u_i - e_i) = 0. \\ \Theta(u_i - e_i') = 0. \end{cases}$$

J'ai dit que cette courbe doit se décomposer dans certains cas, et c'est sur ce point que je désire revenir.

Il est aisé de comprendre pourquoi cette décomposition doit avoir lieu.

Cherchons en effet le degré de la courbe A.

Je suppose $p = 3$, $n > 2$; la courbe A est alors tracée sur la variété V qui a été définie plus haut; la variété V est de degré $6n^3$ et est située dans l'espace à $n^3 - 1$ dimensions.

Pour évaluer le degré de A, il faut couper par une variété plane ayant $n^3 - 2$ dimensions et compter le nombre des points d'intersection.

Cette variété plane sera définie par une seule équation qui sera de la forme

$$\theta = 0,$$

θ étant l'une des fonctions d'ordre n qui donne naissance à la variété V.

Les trois équations

$$\Theta(u_i - e_i) = 0,$$
$$\Theta(u_i - e'_i) = 0,$$
$$\theta = 0$$

admettent $6n$ solutions; la courbe A est donc de degré $6n$.

Maintenant donnons des valeurs particulières aux six constantes e_i et e'_i.

Soient

$$e_i = -v_i^0, \qquad e'_i = -v_i^1,$$

x_0, x_1 étant deux points de la courbe C, et v_i^0, v_i^1 les valeurs correspondantes de v_i.

Il est clair qu'on satisfera aux équations

$$\Theta(u_i + v_i^0) = 0,$$
$$\Theta(u_i + v_i^1) = 0$$

en faisant

$$u_i = v_i.$$

La courbe B fait donc partie de A, et comme elle est de degré $3n$, il faut bien que A se décompose.

Étudions les circonstances de cette décomposition.

Plaçons-nous d'abord dans le cas singulier elliptique.

La courbe A se décompose alors toujours en 6 autres ayant respec-

tivement pour équations

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \alpha_2 + e'_2, \\ u_2 = \alpha_2 + e_2, & u_1 = \alpha_1 + e'_1, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \alpha_3 + e'_3, \\ u_3 = \alpha_3 + e_3, & u_1 = \alpha_1 + e'_1, \\ u_2 = \alpha_2 + e_2, & u_3 = \alpha_3 + e'_3, \\ u_3 = \alpha_3 + e_3, & u_2 = \alpha_2 + e'_2. \end{array}\right.$$

Celle de ces six courbes dont les deux équations occupent la $i^{\text{ème}}$ ligne dans ce tableau, je l'appellerai la courbe $(2, i)$.

Cela posé, supposons

$$e_i = -c_i^0, \qquad e'_i = -c_i^1.$$

On peut faire trois hypothèses différentes sur c_i^0 : deux des c_i^0 doivent en effet être égaux à $\frac{\alpha_i}{2}$; on peut faire de même trois hypothèses sur c_i^1. Cela fait en tout neuf hypothèses différentes : je n'en examinerai que deux, toutes les autres s'en déduisant par permutation. Dans l'une comme dans l'autre, la courbe B se décomposant en trois courbes de degré n, nous devrons retrouver ces trois courbes parmi les six courbes (2).

Soient d'abord

$$c_2^0 = c_2^1 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c_3^0 = c_3^1 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Les équations (2) deviendront

$$(2\ bis)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_1 = \alpha_1 + e'_1, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_1 = \alpha_1 + e'_1, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_2 = \frac{\alpha_2}{2}. \end{array}\right.$$

On ne retrouve ainsi que l'une des trois courbes dans lesquelles se décompose B, à savoir

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad u_3 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

La contradiction n'est qu'apparente. Si, en effet, nous nous plaçons dans le cas singulier elliptique et si nous faisons

$$e_2 = e'_2 = -\frac{\alpha_2}{2}, \qquad e_3 = e'_3 = -\frac{\alpha_3}{2},$$

les équations (1) de la courbe A ne sont plus distinctes; elles sont satisfaites toutes les fois que

$$u_2 = \frac{\alpha_2}{2},$$

et toutes les fois que

$$u_3 = \frac{\alpha_3}{2}.$$

Les équations ne définissent donc plus une courbe, mais une surface ou variété à deux dimensions. Les trois parties de la courbe B se trouvent sur cette surface.

Mais si, restant dans le cas singulier elliptique, on fait *tendre* e_2, e'_2, e_3, e'_3, vers $-\frac{\alpha_2}{2}$ et $-\frac{\alpha_3}{2}$, la *limite* de la courbe A ne contiendra pas la courbe B tout entière.

Si, au contraire, nous plaçant d'abord dans le cas général, nous faisons tendre les termes latéraux vers o, de façon à nous rapprocher indéfiniment du cas singulier elliptique, si nous prenons

$$e_i = -c_i^0, \qquad e'_i = -c_i^1,$$

et de telle manière que, à mesure qu'on se rapproche du cas singulier, e_2, e'_2, e_3, e'_3 tendent vers $-\frac{\alpha_2}{2}$ et $-\frac{\alpha_3}{2}$, alors, la *nouvelle limite* de A contiendra la courbe B tout entière.

Supposons maintenant

$$c_2^0 = \frac{\alpha_2}{2}, \qquad c_3^0 = \frac{\alpha_3}{2}, \qquad c_1^1 = \frac{\alpha_1}{2}, \qquad c_3^1 = \frac{\alpha_3}{2};$$

les équations (2) deviendront

$$(2\,ter)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_2 = \alpha_2 + e'_2, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_1 = \alpha_1 + e_1, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_1 = \frac{\alpha_1}{2}, \\ u_2 = \frac{\alpha_2}{2}, & u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, \\ u_3 = \frac{\alpha_3}{2}, & u_2 = \alpha_2 + e'_2. \end{array}\right.$$

Nous retrouvons ici les trois parties de la courbe B.

Ici encore les équations (2) ne sont pas distinctes.

Elles sont satisfaites par tous les points de la surface

$$u_3 = \frac{\alpha^3}{2},$$

et, en outre, par tous les points des deux courbes (2 *ter*, 1) et (2 *ter*, 2).

Seulement les choses ne se passent pas ici comme dans la première hypothèse, et c'est sur ce point que je désirais attirer l'attention.

Si, restant dans le cas singulier elliptique, nous faisons tendre e_2, e_3, e'_1 et e'_3 vers les limites $-\frac{\alpha_2}{2}$, $-\frac{\alpha_3}{2}$, $-\frac{\alpha_1}{2}$, $-\frac{\alpha_3}{2}$, la limite de la courbe A contiendra la courbe B tout entière.

Étudions maintenant la décomposition de A dans le cas général.

Dans le cas de $p = 3$, on peut supposer que la courbe C est une courbe de quatrième degré sans point double.

Étudions la signification de l'équation

$$(3)\qquad \Theta(u_i - e_i) = 0.$$

On peut toujours poser

$$-e_i = v_i^1 + v_i^2 + v_i^3,$$

v_i^1, v_i^2, v_i^3 étant les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à trois points de C que j'appellerai les points x_1, x_2, x_3, ou, pour abréger encore, les points 1, 2, 3.

De même, nous pouvons toujours poser

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6,$$

les intégrales v_i^4, ... correspondant à trois points de C que j'appellerai les points 4, 5, 6.

L'équation (3), en vertu du théorème de Riemann, peut être remplacée par la suivante :

$$(4) \qquad u_i - e_i = -v_i^7 - v_i^8,$$

les points 7 et 8, qui correspondent aux deux intégrales du second membre de (4), étant deux points quelconques de C. Mais l'équation (4) peut s'écrire

$$v_i^1 + v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 + v_i^7 + v_i^8 = 0;$$

elle signifie que les huit points 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sont sur une même conique.

La signification géométrique de l'équation (3), c'est donc que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 doivent être sur une même conique. Considérons maintenant l'équation

$$(3\ bis) \qquad \Theta(u_i - e'_i) = 0.$$

Nous pourrons toujours poser

$$-e'_i = v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11},$$

et l'équation (3 *bis*) signifiera que les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sont sur une même conique.

La courbe A est définie par les équations simultanées (3) et (3 *bis*);

si l'on veut satisfaire à la fois à ces deux équations, le problème se posera géométriquement de la manière suivante :

On se donne sur la courbe C *six points* 1, 2, 3, 9, 10, 11; *il faut faire passer par* 1, 2, 3 *une conique* K, *et, par* 9, 10, 11, *une conique* K′, *et de telle façon qu'il y ait trois points* 4, 5, 6 *communs à* C *et aux deux coniques.*

A chaque solution de ce problème correspondra un point de A.

Supposons en particulier que deux des points 1, 2, 3 coïncident avec deux des trois points 9, 10, 11; par exemple, 2 avec 10 et 3 avec 11, de sorte que

$$-e_i' = v_i^9 + v_i^2 + v_i^3.$$

Qu'arrivera-t-il alors? Les équations (3) et (3 *bis*) de la courbe A deviendront

$$\Theta(u_i + v_i^4 + v_i^2 + v_i^3) = 0,$$
$$\Theta(u_i + v_i^9 + v_i^2 + v_i^3) = 0,$$

et elles admettront pour solution

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est là l'équation d'une courbe B′; la courbe A se décompose donc, une des deux parties étant la courbe B′.

Examinons géométriquement les circonstances de cette décomposition. Les deux coniques K et K′ ont déjà deux points communs 2 et 3; si elles doivent en avoir trois autres 4, 5, 6, elles se confondront à moins de se décomposer.

Examinons séparément ces deux hypothèses.

On obtiendra les valeurs de u_i (ou des points de A) qui correspondent à la première hypothèse de la manière suivante :

Par les quatre points 1, 2, 3, 9, faisons passer une conique; elle coupera la courbe C en quatre autres points, parmi lesquels j'en choisirai trois qui seront les points 4, 5, 6.

Ce choix peut se faire de trois manières différentes.

Les coniques qui passent par les quatre points 1, 2, 3, 9 forment un faisceau. A chaque conique du faisceau correspondent ainsi trois points de A.

Examinons maintenant la seconde hypothèse.

Pour que deux coniques aient cinq points communs, sans se confondre, il faut que chacune d'elles se décompose en deux droites et que deux de ces droites se confondent. Quatre des cinq points doivent alors se trouver en ligne droite. Les coniques K et K′ ont cinq points communs, 2, 3, 4, 5, 6; quatre de ces points doivent être en ligne droite.

Cela peut se faire de deux manières, de sorte que la seconde hypothèse se subdivise en deux autres que j'appellerai, pour abréger, la *seconde* et la *troisième hypothèse*.

Ou bien, les points 2 et 3 sont en ligne droite avec deux des points 4, 5, 6; par exemple, avec les points 4, 5; ce sera là la deuxième hypothèse.

Ou bien, les points 4, 5 et 6 sont en ligne droite avec un des points 2 et 3; par exemple, avec le point 3; ce sera là la troisième hypothèse.

Examinons d'abord la deuxième hypothèse.

Les points 2, 3, 4, 5 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^2 + v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 = 0.$$

La conique K se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 1, 6; la conique K′ se réduira à la droite 2, 3, 4, 5 et à la droite 9, 6.

Les points 4 et 5 sont fixes et le point 6 est seul mobile; on aura d'ailleurs

$$u_i = v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = v_i^6 - v_i^2 - v_i^3;$$

comme le point 6 est mobile, les points 2 et 3 fixes, je puis écrire cela sous la forme

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3,$$

le point x qui correspond à v_i étant un point mobile quelconque de C.

C'est là l'équation de la courbe B′ et l'on voit ainsi d'une autre manière qu'elle doit faire partie de la courbe A. Mais j'ajouterai qu'elle

doit faire partie d'une infinité de courbes A; et en effet nous pouvons laisser les points 2, 3, 4, 5 fixes et en ligne droite et faire varier les deux autres points 1 et 9 (et par conséquent les quantités e_i et e'_i); nous ne cesserons pas d'avoir

$$u_i = v_i - v_i^2 - v_i^3.$$

Examinons maintenant la troisième hypothèse.

Les points 3, 4, 5, 6 étant en ligne droite, on aura

$$v_i^3 + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6 = 0;$$

d'où

$$u_i = - v_i^3.$$

Comme les u_i sont des constantes, on voit qu'à la troisième hypothèse correspond seulement un point de A.

La courbe A se décompose donc en deux parties correspondant aux deux premières hypothèses; la partie qui correspond à la deuxième hypothèse est la courbe B'.

Nous n'obtenons pas ainsi tous les cas de décomposition de la courbe A.

Soient en effet

$$f_1, \quad f_2, \quad f_3$$

trois constantes quelconques, nous pourrons encore poser

$$\begin{aligned} u_i &= f_i + v_i^4 + v_i^5 + v_i^6, \\ -e_i &= f_i + v_i^1 + v_i^2 + v_i^3, \\ -e'_i &= f_i + v_i^9 + v_i^{10} + v_i^{11}. \end{aligned}$$

Les équations (3) et (3 *bis*) signifieront encore que les six points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont sur une conique K et les six points 4, 5, 6, 9, 10, 11 sur une conique K'.

Si deux des points 1, 2, 3 coïncident avec deux des points 9, 10, 11, ces deux coniques doivent se confondre ou se décomposer. Il en résulte que la courbe A se décomposera encore en deux parties: l'une de ces parties (celle qui correspond à l'hypothèse de la décomposition

de K et de K′) a pour équation

$$u_i = v_i + f_i - v_i^2 - v_i^3.$$

C'est encore une courbe B′. On a la courbe B elle-même si l'on suppose

$$f_i = v_i^2 + v_i^3.$$

9. — Cas voisins du cas elliptique.

J'ai déjà eu l'occasion, au n° **6**, d'étudier les cas voisins du cas singulier elliptique. Nous avons vu que, pour les cas suffisamment voisins de ce cas singulier, la fonction Θ peut se développer suivant les puissances croissantes des *termes latéraux*.

C'est le développement (6) du n° **6** dont nous avons formé plus haut les premiers termes.

Il est aisé d'en former le terme général.

Soit par exemple à former le terme en

$$a_{23}^{\lambda} a_{13}^{\lambda'} a_{12}^{\lambda''},$$

en supposant d'abord $p = 3$.

Posons

$$\gamma_1 = \lambda' + \lambda'', \qquad \gamma_2 = \lambda + \lambda'', \qquad \gamma_3 = \lambda + \lambda',$$

le coefficient du terme cherché sera

$$(-1)^{\lambda+\lambda'+\lambda''} \frac{\theta_1^{(\gamma_1)} \theta_2^{(\gamma_2)} \theta_3^{(\gamma_3)}}{\lambda!\,\lambda'!\,\lambda''!}.$$

Je désigne toujours par $\theta_1\theta_2\theta_3$ le premier terme du développement (6) et par $\theta_1^{(\gamma_1)}$ la dérivée d'ordre γ_1 de la fonction θ_1.

Supposons maintenant $p = 4$ et soit à trouver dans le développement (6) le coefficient du terme général en

$$a_{12}^{\lambda_{12}} a_{13}^{\lambda_{13}} a_{14}^{\lambda_{14}} a_{23}^{\lambda_{23}} a_{24}^{\lambda_{24}} a_{34}^{\lambda_{34}}.$$

Soient

$$\gamma_1 = \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14},$$
$$\gamma_2 = \lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{24},$$
$$\gamma_3 = \lambda_{31} + \lambda_{32} + \lambda_{34},$$
$$\gamma_4 = \lambda_{41} + \lambda_{42} + \lambda_{42}.$$

Il va sans dire que je pose

$$\lambda_{ik} = \lambda_{ki}.$$

Le coefficient cherché sera alors

$$(-1)^{\Sigma\lambda} \frac{\theta_1^{\gamma_1}\theta_2^{\gamma_2}\theta_3^{\gamma_3}\theta_4^{\gamma_4}}{\lambda_{12}!\,\lambda_{13}!\,\lambda_{14}!\,\lambda_{23}!\,\lambda_{24}!\,\lambda_{34}!}.$$

Il est donc facile dans tous les cas de former le développement (6). Voici maintenant l'usage que j'en ferai.

Nous avons défini plus haut au n° **3** ce qu'on doit entendre par surface de translation et par équation *translative* et nous avons vu que l'équation

$$(1) \qquad \Theta = 0$$

est translative si la fonction Θ est une fonction *spéciale*.

Mais on peut se demander si cette équation est encore translative si la fonction Θ est une fonction *non spéciale*.

Pour résoudre cette question j'étudierai l'équation

$$\Theta = 0,$$

en me servant du développement (6) et en supposant que les *termes latéraux* sont assez petits pour qu'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur de ce développement.

Mais cette étude peut se faire de plusieurs manières.

Nous pouvons d'abord supposer que u_1 est très voisin de α_1, mais que u_2, u_3, u_4 ne sont pas très voisins de α_2, α_3, α_4. C'est ainsi que nous avons obtenu le développement (8) du n° **6** dont nous avons formé les premiers termes.

Nous avons formé les termes du premier ordre et nous avons trouvé, pour $p = 3$,

$$u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3}.$$

Dans le cas de $p = 4$, nous aurions trouvé

$$u_1 = \alpha_1 + a_{12}\frac{\theta'_2}{\theta_2} + a_{13}\frac{\theta'_3}{\theta_3} + a_{14}\frac{\theta'_4}{\theta_4}.$$

Cherchons maintenant à former les termes du deuxième ordre.

Soit

$$B = \frac{\theta''_1(\alpha_1)}{\theta'_1(\alpha_1)}.$$

Nous trouverons pour ces termes du deuxième ordre, dans le cas de $p = 4$,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 = \alpha_1 &+ \sum a_{1i}\frac{\theta_i}{\theta_i} - \sum \frac{a_{1i}^2}{2} B\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta_i^2}\right) \\ &- \sum a_{1i}a_{ik}\frac{\theta'_k}{\theta_k}\left(\frac{\theta''_i}{\theta_i} - \frac{\theta'^2_i}{\theta_i^2}\right) \\ &(i, k = 2, 3, 4). \end{aligned}\right.$$

Cette équation peut être remplacée par les suivantes, au même degré d'approximation, c'est-à-dire en négligeant les cubes des a_{1i} et de $u_1 - \alpha_1$.

Nous introduisons trois paramètres w_2, w_3, w_4 et nous posons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= \alpha_1 + \sum_i a_{1i}\frac{\theta'_i(w_i)}{\theta_i(w_i)} \\ u_i &= \frac{Ba_{1i}}{2} + w_i + \sum_k a_{ik}\frac{\theta'_k(w_k)}{\theta_k(w_k)} \\ &(i, k = 2, 3, 4;\ i \gtrless r). \end{aligned}\right.$$

Les équations (3) peuvent remplacer l'équation (1) en négligeant les cubes des termes latéraux.

Or *les équations* (3) *ont un caractère manifestement translatif.* Il semblerait donc que l'équation (1) reste translative même pour les fonctions abéliennes non spéciales. Mais on ne doit pas oublier que les

équations (3) ne sont qu'approchées et nous ne tarderons pas à voir que le caractère translatif ne subsiste pas à un degré supérieur d'approximation.

Une seconde hypothèse est celle où, p étant égal à 4 par exemple, u_1 et u_2 sont très voisins de α_1 et α_2, u_3 et u_4 très différents de α_3 et α_4.

Posons alors

$$u_1 = \alpha_1 + t\xi_1, \qquad u_2 = \alpha_2 + t\xi_2,$$
$$a_{ik} = t^2\gamma_{ik},$$

t étant un paramètre très petit.

La fonction Θ, représentée par le développement (6), se trouvera alors développée suivant les puissances de t; si t est très petit, nous pourrons ne conserver que le premier terme qui est un terme en t^2 et qui s'écrit

$$t^2\theta'_1\theta'_2\theta_3\theta_4(\xi_1\xi_2 - \gamma_{12}).$$

Alors l'équation (1) se réduit à

$$\xi_1\xi_2 = \gamma_{12}.$$

Dans le cas de $p = 3$, si u_1, u_2, u_3 représentent les coordonnées d'un point dans l'espace, cette équation représente un cylindre hyperbolique qui peut, d'une infinité de manières, être regardé comme une surface de translation.

Le caractère translatif est également évident pour $p > 3$.

Nous avons encore trois hypothèses à examiner :

$p = 3$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3;
$p = 4$; u_1, u_2 et u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3; u_4 très différent de α_4;
$p = 4$; u_1, u_2, u_3 et u_4 très voisins de α_1, α_2, α_3 et α_4.

Nous nous en occuperons dans les numéros suivants.

10. — Étude d'une surface de translation.

Les surfaces de translation peuvent être engendrées par la translation d'une courbe gauche et c'est là l'origine du nom qu'on leur a

donné. L'équation générale d'une surface de translation est, comme nous l'avons vu,

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f_1(t) + f'_1(u), \\ y = f_2(t) + f'_2(u), \\ z = f_3(t) + f'_3(u), \end{cases}$$

t et u étant deux variables indépendantes; les f et les f' étant six fonctions quelconques.

La surface définie par l'équation (1) peut être, de deux manières différentes, engendrée par la translation d'une courbe gauche, à savoir par celle de la courbe

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t)$$

et par celle de la courbe

$$x = f'_1(u), \qquad y = f'_2(u), \qquad z = f'_3(u).$$

On peut tracer sur la surface deux systèmes de lignes remarquables que j'appellerai *génératrices*.

Ce sont pour le premier système

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) + f'_1(a), \\ y &= f_2(t) + f'_2(a), \\ z &= f_3(t) + f'_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et t une variable, et pour le second système

$$\begin{aligned} x &= f'_1(u) + f_1(a), \\ y &= f'_2(u) + f_2(a), \\ z &= f'_3(u) + f_3(a), \end{aligned}$$

a étant une constante quelconque et u une variable.

Les génératrices d'un même système sont toutes égales entre elles.

Parmi les surfaces de translation, je distinguerai une classe remarquable de surfaces que j'appellerai *surfaces de translation distinguées*.

On les obtient quand les trois fonctions f'_1, f'_2, f'_3 sont identiques respectivement aux trois fonctions f_1, f_2, f_3. Les deux systèmes de génératrices se confondent alors en un seul.

D'autre part, la surface peut être considérée comme le lieu des milieux des cordes d'une courbe gauche tracée sur la surface et que j'appellerai *courbe directrice*. Elle a pour équations

$$x = 2f_1(t), \qquad y = 2f_2(t), \qquad z = f_3(t).$$

Il suffit d'ailleurs, pour qu'une surface soit distinguée, que les différences

$$f'_1(t) - f_1(t),$$
$$f'_2(t) - f_2(t),$$
$$f'_3(t) - f_3(t)$$

se réduisent à des constantes; c'est-à-dire qu'une génératrice du second système soit égale à une génératrice du second système et semblablement orientée dans l'espace. Ce cas se ramène en effet au précédent d'une manière immédiate.

La surface

$$\Theta = 0,$$

où u_1, u_2, u_3 sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace, est une surface de translation distinguée.

On a en effet

$$\Theta(v_1 + v'_1, v_2 + v'_2, v_3 + v'_3) = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u_i = v_i + v'_i,$$

où les v_i ne dépendent que de x et les v'_i de x'.

C'est donc bien une surface de translation distinguée dont les génératrices ont pour équation

$$u_i = v_i + v^0_i,$$

x_0 étant un point fixe de C et v^0_i la valeur correspondante de v_i.

La directrice a pour équation

$$u_i = 2v_i.$$

Mais ce n'est pas tout. On a également

$$\Theta(-v_i - v_i') = 0,$$

de sorte que l'équation de la surface peut se mettre encore sous la forme

$$u_i = -v_i - v_i'.$$

C'est donc encore le lieu des milieux des cordes de la courbe

$$u_i = -2v_i.$$

C'est donc, de deux manières différentes, une surface de translation distinguée qui a deux courbes directrices

$$u_i = 2v_i, \qquad u_i = -2v_i$$

et deux systèmes de génératrices

$$u_i = v_i + v_i^0, \qquad u_i = -v_i - v_i^0.$$

Avant d'aller plus loin, étudions les points à l'infini des surfaces de translation; elles correspondent évidemment aux points à l'infini des génératrices.

Considérons la courbe

$$x = f_1'(u), \qquad y = f_2'(u), \qquad z = f_3'(u)$$

et l'une des asymptotes de cette courbe. Supposons que l'on ait pris l'axe des z parallèle à cette asymptote, de telle façon que, pour une certaine valeur u_0 de u, $f_3'(u_0)$ devienne infini, $f_1'(u_0)$ et $f_2'(u_0)$ restant finies.

Alors

$$x = f_1(t) + f_1'(u_0), \qquad y = f_2(t) + f_2'(u_0),$$

où t est une variable et u_0 une constante, sera l'équation d'un cylindre asymptotique à la surface.

La projection d'une génératrice quelconque sur le plan des xy sera égale à la section droite de ce cylindre.

Cela posé, voici où je voulais en venir.

Examinons l'hypothèse

$$p = 3; \quad u_1, u_2, u_3 \text{ très voisins de } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3.$$

Posons

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik} \qquad (i \gtrless k):$$

la série (6) du n° 6 se trouve alors développée suivant les puissances de t et le premier terme, qui est en t^2, s'écrit

$$t^2\,\theta'_1\,\theta'_2\,\theta'_3\,(\xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3).$$

Si je suppose t très petit, je pourrai négliger les autres.

Donc la surface algébrique du troisième ordre

$$(2) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 = \gamma_{23}\xi_1 + \gamma_{13}\xi_2 + \gamma_{13}\xi_3$$

doit être une surface de translation.

C'est même une surface de translation distinguée.

Sur ce dernier point le passage à la limite que je viens d'opérer pourrait peut-être laisser des doutes.

Soit S une surface de translation distinguée *variable* ayant pour limite une certaine surface S′ (quand le paramètre variable dont dépend la surface S tend vers une certaine limite). Soit M un point de S tendant vers un point M′ de S′. Par le point M passeront deux génératrices de S, que j'appellerai G et H; les deux courbes G et H tendront vers deux courbes limites G′ et H′ passant par le point M′; et la surface S′ pourra, à la limite, être regardée comme engendrée par la translation de G′ ou par celle de H′. C'est donc une surface de translation.

La surface S étant une surface de translation distinguée, les deux courbes G et H sont égales entre elles; s'ensuit-il que les deux courbes G′ et H′ soient égales entre elles? Il n'en est pas forcément ainsi; il peut se faire qu'à la limite la courbe G se décompose et même que,

dans cette décomposition, certaines parties de cette courbe soient rejetées à l'infini. De même la courbe H, égale à G, se décomposera; et il peut se faire que G′ soit la limite d'une partie de G et H′ celle d'une partie de H correspondant à une *autre* partie de G.

Pour mieux faire comprendre ma pensée, je vais essayer de fixer les idées; supposons que G et H soient deux cubiques gauches égales: on pourrait imaginer qu'à la limite G se décompose en une droite à distance finie (qui serait G′) et une conique rejetée à l'infini, et que H se décompose en une droite rejetée à l'infini et une conique à distance finie (qui serait H′).

C'est d'ailleurs ce qui arrive quand on passe à la limite d'une autre manière et comme nous l'avons fait au n° 6; c'est-à-dire de telle sorte que $u_1 - \alpha_1$ devienne infiniment petit et que $u_2 - \alpha_2$, $u_3 - \alpha_3$ restent finis.

La surface (2) est donc une surface de translation; mais on pourrait se demander si c'est une surface distinguée.

On peut faire de cette surface une transformation homographique très simple qui en simplifie un peu l'équation en lui conservant le caractère translatif.

Nous pouvons toujours trouver des quantités

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

définies par les équations

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = -\gamma_{12}, \qquad \varepsilon_2\varepsilon_3 = -\gamma_{23}, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_3 = -\gamma_{13};$$

nous poserons alors

$$\xi_1 = \varepsilon_1 x, \qquad \xi_2 = \varepsilon_2 y, \qquad \xi_3 = \varepsilon_3 z,$$

et l'équation (2) deviendra

$$xyz + x + y + z = 0. \tag{3}$$

La surface du troisième ordre (3) (où x, y, z sont regardés comme les coordonnées rectangulaires d'un point) est donc une surface de translation.

La surface (3) admet trois cylindres asymptotiques qui sont

$$xy + 1 = 0,$$
$$xz + 1 = 0,$$
$$yz + 1 = 0.$$

D'après une remarque faite plus haut sur les cylindres asymptotiques des surfaces de translation, la projection d'une génératrice sur l'un quelconque des plans de coordonnées est une hyperbole équilatère.

Toute génératrice est donc l'intersection de deux cylindres hyperboliques équilatères dont les plans asymptotiques sont parallèles aux plans de coordonnées, à savoir aux plans

$$x = 0, \qquad z = 0$$

pour le premier cylindre, et aux plans

$$y = 0, \qquad z = 0$$

pour le second. L'intersection de ces deux cylindres se décompose en une droite rejetée à l'infini dans la direction du plan $z = 0$ et en une cubique gauche.

Les génératrices de notre surface de translation sont donc des cubiques gauches dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.

Cela nous fait déjà prévoir que la surface sera une surface de translation distinguée; en effet, la projection d'une génératrice du second système sur le plan des xy doit être, comme celle d'une génératrice du premier système, égale à l'hyperbole

$$xy + 1$$

et semblablement orientée.

Les projections des génératrices des deux systèmes sur l'un des trois plans de coordonnées sont donc égales; donc les génératrices du second système sont égales à celles du premier et semblablement orientées.

C. Q. F. D.

La surface a donc une directrice qui est aussi une cubique gauche, et les deux systèmes de génératrices se confondent en un seul. Mais ce n'est pas tout; la surface admet un centre de symétrie qui est l'origine, et trois plans de symétrie qui sont les plans $x = y$, $x = z$, $y = z$. Elle admet en conséquence trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

Nous pouvons conclure de là que : ou bien la directrice admettra l'origine pour centre de symétrie; ou bien sa symétrique sera encore une directrice. Or une cubique gauche ne peut avoir de centre de symétrie; donc la surface admet *deux directrices,* symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine.

On pourrait raisonner de même avec l'un des trois plans de symétrie; car une cubique gauche ne peut pas non plus avoir de plan de symétrie. Les deux directrices sont donc aussi symétriques l'une de l'autre par rapport à l'un de ces trois plans.

On verrait de même que chacune des directrices admet trois axes de symétrie binaire et un axe de symétrie ternaire.

La surface (3) jouit donc de la même propriété que la surface $\Theta = 0$; je veux dire qu'elle sera *de deux manières différentes* une surface distinguée et qu'elle aura par conséquent deux directrices et deux systèmes de génératrices.

Nous sommes ainsi amené à rechercher les cubiques gauches que l'on peut tracer sur la surface.

Une cubique gauche est déterminée quand on en connaît six points et en particulier quand on connaît les trois asymptotes.

D'un autre côté une cubique gauche, qui a ses trois asymptotes sur les trois cylindres asymptotiques de la surface, rencontre cette surface en neuf points à l'infini. Elle ne peut donc la rencontrer encore en un point à distance finie sans être tout entière sur la surface.

Voici donc ce que je vais faire.

Je prendrai une droite sur chacun des trois cylindres asymptotiques. Je construirai une cubique ayant pour asymptotes ces trois droites qui seront respectivement parallèles aux trois axes de coordonnées. J'écrirai qu'un point, à distance finie, mais d'ailleurs quelconque de cette cubique est sur la surface; et la cubique sera tout entière sur la surface.

Soient

$$y = u, \qquad z = -\frac{1}{u},$$

$$z = v, \qquad x = -\frac{1}{v},$$

$$x = w, \qquad y = -\frac{1}{w}$$

ces trois asymptotes; u, v, w sont trois constantes quelconques.

On voit que les trois asymptotes sont bien sur les trois cylindres asymptotiques.

Pour qu'un point de la cubique soit sur la surface, il faut et il suffit que

$$uvw = \pm 1;$$

soit d'abord

$$uvw = 1. \tag{4}$$

Posons

$$\frac{1}{v} + w = \xi, \qquad \frac{1}{w} + u = \eta, \qquad \frac{1}{u} + v = \zeta. \tag{5}$$

La *forme* de la cubique gauche dépendra uniquement de ξ, η et ζ; de sorte que deux cubiques gauches, correspondant à un même système de valeurs de ξ, η et ζ, seront égales.

Les trois paramètres u, v, w étant liés par la relation (4), on voit qu'il y a sur la surface une double infinité de cubiques gauches.

Les équations (5) deviennent, en tenant compte de (4),

$$1 + \frac{1}{u} = \xi v, \qquad 1 + \frac{1}{v} = \eta w, \qquad 1 + \frac{1}{w} = \zeta u. \tag{6}$$

Des équations (5) et (6) nous tirons

$$u = \frac{1+\eta}{1+\zeta}, \qquad v = \frac{1+\zeta}{1+\xi}, \qquad w = \frac{1+\xi}{1+\eta}, \tag{7}$$

avec la condition

$$\xi\eta\zeta = +\xi + \eta + \zeta + 2. \tag{8}$$

Alors u, v et w étant fonctions rationnelles de ξ, η et ζ, à un système de valeurs de ξ, η, ζ correspondra *un seul* système de valeurs de u, v, w; deux de nos cubiques gauches ne peuvent donc être égales entre elles, *à moins que ces fonctions rationnelles ne se présentent sous une forme indéterminée*. C'est ce qui arrive si l'on fait

$$\xi = \eta = \zeta = -1,$$

valeurs qui satisfont d'ailleurs à la relation (8).

C'est donc ainsi que l'on obtient les génératrices de notre surface qui doivent, en nombre infini, être égales entre elles et semblablement orientées.

Pour obtenir les équations de ces génératrices, il faut donner à ξ, η, ζ non pas la valeur -1, qui rendrait les expressions de u, v, w indéterminées, mais des valeurs très voisines, en les choisissant de telle sorte que la relation (8) ne cesse pas d'être satisfaite, c'est-à-dire que l'on ait sensiblement (en négligeant les carrés de $1+\xi$, $1+\eta$, $1+\zeta$)

$$\xi + \eta + \zeta = -3. \tag{9}$$

On tire de là, en combinant les équations (7) et (9),

$$u = \frac{1}{t}, \qquad v = \frac{t}{1+t}, \qquad w = 1 + t,$$

t étant un paramètre arbitraire; telles sont les valeurs de u, v, w qui correspondent aux génératrices.

De $u^2 v^2 w^2 = 1$ on aurait pu déduire, au lieu de (4), la relation

$$uvw = -1. \tag{4 bis}$$

On peut donc tracer sur la surface deux familles de cubiques gauches, formées chacune d'une double infinité de courbes, et correspondant la première à (4), la seconde à (4 *bis*).

Si nous prenons (4 *bis*) au lieu de (4) et que nous écrivions (5), nous trouverons

$$u = \frac{1-\eta}{\zeta-1}, \qquad v = \frac{1-\zeta}{\xi-1}, \qquad w = \frac{1-\xi}{\eta-1}, \tag{7 bis}$$

avec la condition

$$(8\,bis) \qquad \xi\eta\zeta = \xi + \eta + \zeta - 2.$$

Les génératrices du second système correspondent alors aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 1,$$

qui rendent les expressions (7 *bis*) indéterminées et qui satisfont à (8 *bis*).

Quant à la directrice correspondant au premier système, elle correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = -2,$$

qui satisfont à (8 *bis*) et qui donnent

$$u = v = w = -1.$$

Enfin la directrice correspondant au deuxième système correspondra aux valeurs

$$\xi = \eta = \zeta = 2,$$

qui satisfont à (8) et qui donnent

$$u = v = w = 1.$$

Ainsi les génératrices du premier système et la directrice du second appartiendront à la première famille de cubiques; les génératrices du second système et la directrice du premier appartiendront à la seconde famille de cubiques.

Notre surface est donc le lieu des milieux, des cordes de deux cubiques gauches qui ont respectivement pour asymptotes

$$(10) \qquad -y = z = 1, \qquad -z = x = 1, \qquad -x = y = 1$$

et

$$y = -z = 1, \qquad z = -x = 1, \qquad x = -y = 1.$$

Étant données trois droites quelconques dans l'espace, je puis toujours choisir des axes obliques tels que ces droites aient pour équa-

tions

$$(11)\qquad \begin{cases} y = -b, & z = c, & z = -c, \\ x = a, & x = -a, & y = b. \end{cases}$$

Il suffit ensuite d'une transformation homographique très simple $\left(\text{en changeant } x, y, z \text{ en } \frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)$ pour ramener les équations (11) aux équations (10).

Si nous nous rappelons qu'une cubique gauche est déterminée par ses asymptotes, nous conclurons que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche quelconque est une transformée homographique de la surface (3) et par conséquent est une surface à centre.

On peut prendre la question par un autre côté.

Soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coordonnées d'un point; soit une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes; les équations de la cubique pourront se mettre sous la forme

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t - a_i} + b_i,$$

où t est un paramètre variable et les β, a et b des constantes.

La surface lieu des milieux de ses cordes aura pour équation

$$(12)\qquad \xi_i = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + b_i,$$

où t et u sont deux paramètres.

Soit P un polynome du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ, et par conséquent du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces variables; ce polynome contiendra huit coefficients arbitraires.

Si nous y substituons à la place des ξ_i leurs valeurs (12), on obtiendra une fonction rationnelle R tant en t qu'en u et symétrique par rapport à ces variables. Si nous décomposons cette fonction rationnelle en éléments simples, d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, nous pourrions obtenir seize éléments différents; on pourrait avoir en effet un terme

$$\frac{1}{t - a_1}\,\frac{1}{u - a_1},$$

où le premier facteur pourrait être remplacé par

$$\frac{1}{t-a_2},\quad \frac{1}{t-a_3}\quad \text{ou}\quad 1,$$

et le second par

$$\frac{1}{u-a_2},\quad \frac{1}{u-a_3}\quad \text{ou}\quad 1.$$

Mais on voit d'abord qu'il ne peut y avoir de terme en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_i)},$$

mais seulement en

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_i)} \qquad (i \gtrless k).$$

Le développement de notre fonction rationnelle R en éléments simples comprendra donc treize termes; et si l'on observe que, par raison de symétrie,

$$\frac{1}{(t-a_i)(u-a_k)}\quad \text{et}\quad \frac{1}{(t-a_k)(u-a_i)},$$

$$\frac{1}{t-a_i}\quad \text{et}\quad \frac{1}{u-a_i}$$

doivent avoir même coefficient, on verra que le développement R contient sept coefficients.

En annulant ces sept coefficients, on impose sept conditions aux huit coefficients de P, mais il en reste encore un arbitraire; de sorte que l'équation de la surface (12) peut s'écrire

$$P = 0;$$

cette surface est donc du troisième degré.

Jusqu'ici l'origine est restée arbitraire; nous pourrons la choisir de façon à faire disparaître les trois termes du second degré; alors, comme la surface doit avoir un centre, le terme de degré 0 disparaîtra de lui-même.

Passons encore à une autre hypothèse; soit

$$p = 4;$$

u_1, u_2, u_3 très voisins de α_1, α_2, α_3; u_4 très voisin de α_4.

Posons encore

$$(i = 1, 2, 3) \qquad u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik},$$

il viendra, en négligeant les termes en t^5,

$$\Theta = t^3\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3),$$

et l'équation $\Theta = 0$ s'écrira

$$\xi_1\xi_2\xi_3 = \gamma_{23}\xi_1 + \gamma_{13}\xi_2 + \gamma_{12}\xi_3.$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas précédent.

11. — Extension au cas de $p = 4$.

Nous allons examiner une dernière hypothèse

$$p = 4;$$

u_1, u_2, u_3, u_4 très voisins de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Cette hypothèse va enfin nous permettre de montrer que les fonctions non spéciales, c'est-à-dire les fonctions abéliennes de genre p qui ne sont pas engendrées par une courbe algébrique de genre p, ne conservent pas le caractère translatif, c'est-à-dire que les théorèmes de Riemann ne sont plus vrais pour elles.

Posons encore

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik} \qquad (i \geq k);$$

il viendra, en négligeant les termes en t^5,

$$\Theta = t^3\theta'_1\theta'_2\theta'_3\theta'_4(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \Sigma\gamma_{12}\gamma_{34}).$$

La première somme

$$\Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4$$

comprend six termes que l'on déduit les uns des autres en permutant

les indices, de sorte que

$$\begin{aligned}\Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 = \quad & \gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \gamma_{13}\xi_2\xi_4 + \gamma_{14}\xi_2\xi_3 \\ & + \gamma_{23}\xi_1\xi_4 + \gamma_{24}\xi_1\xi_3 + \gamma_{34}\xi_1\xi_2.\end{aligned}$$

La seconde somme comprend trois termes déduits les uns des autres par permutations d'indices, de sorte que

$$\Sigma\gamma_{12}\gamma_{34} = \gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{24} + \gamma_{14}\gamma_{23}.$$

L'équation $\Theta = 0$ peut donc, pour t très petit, être remplacée par la suivante

$$(1) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 - \Sigma\gamma_{12}\xi_3\xi_4 + \Sigma\gamma_{12}\gamma_{34} = 0.$$

C'est l'équation d'une variété à trois dimensions dans l'espace à quatre dimensions, si l'on regarde les ξ comme des coordonnées rectangulaires dans cet espace. J'appellerai cette variété V. Elle est algébrique et du quatrième degré; elle admet l'origine comme centre de symétrie.

La variété à trois dimensions qui a pour équation

$$\Theta = 0,$$

si l'on y regarde les u comme des coordonnées rectangulaires dans l'espace à quatre dimensions; cette variété, dis-je, jouit, *si la fonction* Θ *est spéciale*, d'une propriété analogue à celle des surfaces de translation distinguées.

Considérons en effet la courbe (variété à une dimension) qui a pour équation

$$u_i = 3v_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Prenons trois points quelconques sur cette courbe; le lieu du centre de gravité de ces trois points sera, d'après les théorèmes de Riemann, la variété $\Theta = 0$.

Nous appellerons donc *variété de translation*, toute variété dont

l'équation peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \xi_i = f_i(t) + f_i'(t') + f_i''(t'') \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

t, t' et t'' étant trois paramètres.

En donnant à deux des paramètres t, t', t'' des valeurs constantes et faisant varier le troisième, on obtiendra trois systèmes de génératrices.

Si les trois fonctions f_i, f_i', f_i'' sont identiques, c'est-à-dire si les génératrices des trois systèmes sont égales et semblablement orientées, la variété sera dite *distinguée;* les trois systèmes de génératrices se confondront en un seul; et la courbe

$$\xi_i = 3 f_i(t)$$

s'appellera *directrice*.

Étudions les points à l'infini, considérons une asymptote d'une des génératrices et prenons-la par exemple parallèle à l'axe des ξ_4. Soit t_4 une valeur de t'' telle que

$$f_4''(t_4) = \infty.$$

Posons alors, pour abréger,

$$f_i''(t_4) = a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous voyons que, pour $t'' = t_4$, on a

$$(3) \qquad \xi_4 = \infty; \qquad \xi_i = f_i(t) + f_i'(t') + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Si donc dans l'équation de la variété (2), obtenue en éliminant t, t' et t'' entre les équations (2), on ne considère que les termes du degré le plus élevé en ξ_4 (ce qui revient à faire $\xi_4 = \infty$), on obtiendra une certaine équation en ξ_1, ξ_2, ξ_3 qui sera l'équation d'une surface de translation. Si la variété (2) est distinguée, il en sera de même de cette surface et sa directrice aura pour équation

$$\xi_i = 2 f_i(t) + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La variété V doit être de translation, au moins quand la fonction Θ est spéciale, et l'on peut supposer, par conséquent, qu'on ait mis ses équations sous la forme (2).

Donnons alors à t'' une valeur constante qui rende $f''_4(t'')$ infinie. On obtiendra les équations (3) qui (abstraction faite de l'équation $\xi_4 = \infty$) définissent une certaine surface S_4, qui sera de translation.

On obtiendra l'équation de cette surface S_4 en égalant à o le coefficient de la plus haute puissance de ξ_4 (c'est-à-dire de ξ_1) dans l'équation (1).

On définirait de la même manière les surfaces S_1, S_2 et S_3. L'équation de la surface S_4, ainsi obtenue, s'écrit

$$(4) \qquad \xi_1\xi_2\xi_3 - \gamma_{23}\xi_1 - \gamma_{13}\xi_2 - \gamma_{12}\xi_3 = 0.$$

C'est la surface que nous avons étudiée dans le numéro précédent.

Nous avons vu que c'était une surface de translation distinguée. Les équations (3) doivent donc être celles d'une surface distinguée, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$f_i = f'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Comme j'aurais pu tout aussi bien raisonner sur f_4 ou f'_4 au lieu de f''_4, que rien ne distingue de f_4 et f'_4, je puis écrire

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

et comme j'aurais pu raisonner sur S_1, S_2, S_3 comme sur S_4, nous aurons

$$f_i = f'_i = f''_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

c'est-à-dire que V sera une variété de translation distinguée.

Quelle sera maintenant la nature de sa directrice? La directrice de la surface S_4, qui a pour équation

$$\xi_i = 2f_i(t) + a_i,$$

est, comme nous l'avons vu, une cubique gauche ayant ses asymptotes parallèles aux axes. Il en sera donc de même de la courbe

$$\xi_i = 3f_i(t) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Or, ce qui caractérise une cubique gauche, dont les asymptotes

sont parallèles aux axes, c'est que deux quelconques des trois coordonnées sont liées par une relation homographique. Donc, deux quelconques des trois quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, ou (puisque j'aurais pu raisonner sur S_1 aussi bien que sur S_4) deux quelconques des quatre quantités $3f_1(t)$, $3f_2(t)$, $3f_3(t)$, $3f_4(t)$ sont liées par une relation homographique.

Donc la directrice de la variété V est une courbe de l'espace à quatre dimensions, analogue aux cubiques gauches; c'est une *quartique* que j'appellerai Q et dont l'équation est de la forme

$$\xi_i = \frac{3\beta_i}{t - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{5}$$

Soient donc

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi_i = 3\lambda_1^i & (i = 2, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_2^i & (i = 1, 3, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_3^i & (i = 1, 2, 4), \\ \xi_i = 3\lambda_4^i & (i = 1, 2, 3) \end{array}\right. \tag{6}$$

les asymptotes de la quartique Q.

La cubique qui sert de directrice à la surface S_4 aura pour asymptotes

$$\xi_i = 2\lambda_k^i + \lambda_4^i \qquad (i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3;\ i \gtrless k).$$

Or nous connaissons les asymptotes de la directrice de S_4; on peut les déduire de l'analyse du numéro précédent.

J'appellerai $k^{ième}$ *asymptote* ($k = 1, 2, 3$) de cette directrice celle qui correspond à $\xi_k = \infty$, et j'écrirai la première équation de la première asymptote sous la forme

$$\xi_2 = \pm\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}}. \tag{7}$$

La surface S_4 a deux directrices; le signe + correspond à la première directrice, le signe — à la seconde. Nous prendrons, par exemple, la première directrice et le signe +.

Les autres équations de la première asymptote et celles des autres

asymptotes se déduiraient de l'équation (7) par permutations d'indices.

Nous aurons ainsi six équations analogues à (7); j'appellerai *équation* (k, h) celle des équations de la $k^{\text{ième}}$ asymptote qui donne ξ_h.

On verrait alors que dans l'équation (k, h) on doit prendre le signe $+$ si h succède à k dans l'ordre circulaire 1, 2, 3, 1, et le signe $-$ si c'est k qui succède à h.

On a donc

$$(8) \qquad 2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = +\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}}$$

avec cinq autres équations analogues.

De ces six équations (8) on déduit d'ailleurs aisément

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1 = 0, \\ \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = 0, \\ \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_4^3 = 0. \end{cases}$$

On peut, en considérant la directrice de S_1, de S_2, ou de S_3 au lieu de S_4, obtenir trois autres groupes de six équations analogues à (8).

Cela ferait en tout vingt-quatre équations; mais elles ne sont pas toutes distinctes. En effet, les équations (8) peuvent être remplacées par trois d'entre elles et par les trois équations (9). Chacun des quatre groupes de six équations peut être remplacé par trois de ces six équations et par un groupe de trois équations analogues à (9). Mais les quatre groupes de trois équations analogues à (9) ne contiennent en réalité que quatre équations distinctes, à savoir les trois équations (9) et l'équation

$$(9\ bis) \qquad \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 = 0.$$

Il y a donc seulement seize équations distinctes que j'appellerai *les équations* (10).

Il faut dire quelques mots au sujet des radicaux qui entrent dans ces équations. Il semble au premier abord que les six équations (8)

contiennent trois radicaux distincts

$$\sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{13}}{\gamma_{23}}},\quad \sqrt{-\frac{\gamma_{12}\gamma_{23}}{\gamma_{13}}},\quad \sqrt{-\frac{\gamma_{13}\gamma_{23}}{\gamma_{12}}};$$

mais ils s'expriment tous rationnellement en fonctions des γ et du radical unique

$$\rho_4 = \sqrt{-\gamma_{23}\gamma_{12}\gamma_{13}}.$$

Nous avons donc en tout dans nos équations (10) quatre radicaux ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 que l'on peut déduire de ρ_4 par permutations d'indices. En réalité, ces quatre radicaux ne sont pas encore distincts; car le produit $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$ est égal au produit des six γ et, par conséquent, rationnel. D'ailleurs, il est impossible, si les γ sont regardés comme indépendants, d'exprimer ρ_3, par exemple, en fonction rationnelle de ρ_1, de ρ_2 et des γ.

Si donc on se donne les γ, il faudra encore *se donner* le signe de ρ_1, ρ_2, ρ_3; le signe de ρ_4 s'en déduira.

Nos seize équations (10) peuvent se répartir en quatre groupes de quatre. Le premier groupe contiendra les équations qui définissent les λ_i^1 et qui s'écrivent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1 = 0,\\ &2\lambda_3^1 + \lambda_4^1 = \frac{\rho_4}{\gamma_{23}},\\ &2\lambda_4^1 + \lambda_2^1 = \frac{\rho_2}{\gamma_{34}},\\ &2\lambda_2^1 + \lambda_3^1 = -\frac{\rho_3}{\gamma_{24}}.\end{aligned}\right.$$

Voici comment ont été déterminés les signes des seconds membres.

Revenons à l'équation (7); le second membre, en prenant le signe + devant le radical, s'écrit $\frac{\rho_4}{\gamma_{13}}$; j'ai donc pris, pour la première équation (8),

$$(8\ bis)\qquad 2\lambda_1^2 + \lambda_3^2 = \frac{\rho_4}{\gamma_{13}}.$$

Pour obtenir les cinq autres équations (8), il suffit de permuter les

indices 1, 2, 3 de toutes les façons possibles, en conservant le signe + devant le second membre si la permutation appartient au groupe alterné et en lui donnant le signe — dans le cas contraire.

On obtiendra ensuite les trois autres groupes de six équations analogues à (8) en permutant *circulairement* les quatre indices 1, 2, 3, 4. Cette règle pourrait toutefois soulever une difficulté. Quand on permute circulairement 1, 2, 3, 4, pour les changer en 2, 3, 4, 1, le carré ρ_1^2 se change en ρ_1^2; mais on ne sait pas si ρ_4 se change en $+\rho_1$ ou en $-\rho_1$.

Pour tenir compte de cette difficulté j'écrirai la première équation (8), non plus sous la forme (8 *bis*), mais sous la forme

$$(8\,ter) \qquad 2\lambda_1^2 + \lambda_4^2 = \frac{\varepsilon_4\rho_4}{\gamma_{13}},$$

où $\varepsilon_4 = \pm 1$ et dans les autres équations (8) je remplacerai de même ρ_4 par $\varepsilon_4\rho_4$. Je ferai ensuite une permutation circulaire d'indices; et j'obtiendrai trois autres groupes d'équations analogues à (8) où entreront trois nombres ε_1, ε_2, ε_3, tous égaux à ± 1.

Cela posé, nous avons vu que de nos quatre radicaux ρ, trois sont indépendants; je puis donc prendre arbitrairement le signe de trois d'entre eux; celui du quatrième s'en déduira; de même, je puis prendre arbitrairement le signe de trois des ε, celui du quatrième s'en déduira. Je puis donc faire

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1.$$

Mais je ne sais pas si ε_1 est égal à $+1$ ou à -1.

C'est ainsi que j'ai obtenu les équations (11). Pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que

$$\frac{\rho_4}{\gamma_{23}} + \frac{\rho_2}{\gamma_{34}} = \frac{\rho_3}{\gamma_{24}}$$

ou que

$$(12) \qquad \sqrt{\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{34}\gamma_{24}} + \sqrt{\gamma_{13}\gamma_{14}\gamma_{23}\gamma_{24}} = \sqrt{\gamma_{12}\gamma_{14}\gamma_{23}\gamma_{34}}.$$

Cette condition ne change pas quand on permute circulairement les

quatre indices; les quatre groupes d'équations analogues à (11) seront donc compatibles si l'on suppose la condition (12) satisfaite et que l'on prenne $\varepsilon_1 = 1$.

La condition (12) est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les seize équations (10) soient compatibles.

On peut encore se demander s'il existe une quartique Q admettant les asymptotes définies par ces seize équations et si la variété de translation distinguée, dont Q est la directrice, est bien la variété V.

Nous savons que les périodes a_{ik} sont au nombre de $\frac{p(p+1)}{2}$, c'est-à-dire, dans le cas de $p = 4$, au nombre de 10. D'un autre côté, le nombre des modules d'une courbe de genre 4 est égal à $3p - 3 = 9$. Il faut donc une condition et une seule pour qu'une fonction Θ de genre 4 soit spéciale; si cette condition unique est remplie, la variété $\Theta = 0$ est une variété de translation distinguée.

Si les termes latéraux $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petits, cette variété diffère très peu de V; il suffit donc d'une condition pour que V soit une variété de translation distinguée. Or nous venons de voir que, pour que V soit une variété de translation distinguée, il y a une condition nécessaire, c'est la condition (12); donc, comme d'ailleurs l'équation (12) est indécomposable, cette condition sera aussi suffisante.

Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants :

1° *Si une fonction Θ n'est pas spéciale, c'est-à-dire si elle ne doit pas son origine à une courbe algébrique de même genre, l'équation $\Theta = 0$ ne présente pas, en général, le caractère translatif* qu'elle présente, au contraire, d'après les théorèmes de Riemann si la fonction Θ est spéciale.

2° *Pour qu'une fonction Θ de genre 4 doive son origine à une courbe algébrique de genre 4, il faut et il suffit qu'il y ait une certaine relation entre les périodes a_{ik}.*

Cette relation est transcendante et, en général, assez compliquée. *Mais si les périodes a_{ii} étant finies, les périodes $a_{ik} (i \gtrless k)$ sont très petites, cette relation se réduit à*

$$(12\,bis) \quad \sqrt{a_{12}a_{13}a_{34}a_{24}} + \sqrt{a_{13}a_{14}a_{23}a_{24}} = \sqrt{a_{12}a_{14}a_{23}a_{34}}.$$

Pour l'étude de la variété V, on peut encore raisonner comme il suit :

Reprenons les équations de la quartique Q; la variété dont cette quartique est la directrice aura pour équations

$$(13) \qquad \xi_i = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + \frac{\beta_i}{v - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

t, u et v étant trois variables auxiliaires.

Soit maintenant P un polynome entier du premier degré par rapport à chacune des quatre variables ξ_i (et, par conséquent, du quatrième degré par rapport à l'ensemble de ces quatre variables). Ce polynome contiendra seize coefficients arbitraires.

Substituons-y à la place des ξ_i leurs valeurs (13); P deviendra une fonction R rationnelle en t, u, v; décomposons cette fonction rationnelle R en éléments simples d'abord par rapport à t, puis par rapport à u, puis par rapport à v. Chaque élément sera le produit d'un coefficient numérique et de trois facteurs. Le premier facteur peut être

$$\frac{1}{t - a_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou } 1,$$

le second

$$\frac{1}{u - a_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou } 1,$$

le troisième

$$\frac{1}{v - a_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad \text{ou } 1.$$

A ce compte, le développement de R pourrait contenir $5^3 = 125$ éléments simples; mais il faut observer qu'aucun élément ne peut contenir deux des trois facteurs

$$\frac{1}{t - a_i}, \qquad \frac{1}{u - a_i}, \qquad \frac{1}{v - a_i},$$

avec le même indice i; le développement de R contient donc seulement soixante-treize éléments simples.

Si l'on observe ensuite que la fonction R doit être symétrique en t, u, v, on voit que plusieurs des coefficients de ces soixante-treize élé-

ments doivent être égaux, de sorte qu'il ne reste que quinze coefficients distincts.

Si j'annule ces quinze coefficients, j'introduirai quinze relations entre les seize coefficients de P, de sorte qu'un de ces seize coefficients reste encore arbitraire.

L'équation de la variété dont Q est directrice sera donc de la forme

$$P = 0.$$

Nous avons choisi les axes parallèles aux asymptotes de Q, mais les directions des axes sont seules ainsi déterminées, l'origine reste arbitraire; je puis en disposer de façon à faire disparaître les quatre termes du troisième degré du polynome P.

Je dis que les quatre termes du premier degré auront disparu du même coup.

Posons

$$P = P_4 \xi_4 + P'_4,$$

P_4 et P'_4 étant deux polynomes du premier degré par rapport à chacune des trois variables ξ_1, ξ_2, ξ_3 et, par conséquent, du troisième degré par rapport à l'ensemble de ces trois variables. L'équation $P_4 = 0$ doit être, comme nous l'avons vu plus haut, celle d'une surface de translation distinguée ayant pour équations

$$\xi_1 = \frac{\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{u - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et pour directrice

$$\xi_i = \frac{2\beta_i}{t - a_i} + \frac{\beta_i}{a_4 - a_i} + b_i.$$

C'est donc, d'après le paragraphe précédent, une surface à centre et, comme les termes du deuxième degré (qui donnent dans P des termes du troisième degré) manquent par suite du choix de l'origine, le centre ne peut être qu'à l'origine. Le terme de degré o doit donc manquer également.

Donc le terme en ξ_4 manque dans P, et l'on démontrerait de même que les autres termes du premier degré manquent également.

Le polynome P ne contient donc que des termes de degré pair et nous pouvons écrire

$$P = \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 - \Sigma \gamma_{12} \xi_3 \xi_4 + \delta.$$

Le polynome P contient donc encore sept coefficients, à savoir δ et les six γ.

L'équation de la quartique Q contient douze arbitraires, à savoir les quatre a_i, les quatre β_i et les quatre b_i: mais nous pouvons faire subir à t un changement linéaire en posant

$$t = \frac{\lambda t' + \mu}{\lambda_1 t' + \mu_1},$$

λ, μ, λ_1, μ_1 étant des constantes quelconques que nous pouvons choisir de telle façon que a_1, a_2 et a_3 aient des valeurs données; il reste $12 - 3 = 9$ arbitraires; de plus, nous avons choisi une origine particulière, ce qui revient à attribuer aux quatre b_i des valeurs particulières. Il reste donc $9 - 4 = 5$ arbitraires. Il faut donc $7 - 5 = 2$ conditions pour que $P = 0$ soit une variété admettant une quartique pour directrice.

L'une de ces conditions nous est déjà connue, c'est la condition (12). Nous savons d'autre part, quand cette condition est remplie, déterminer les asymptotes de la quartique Q. C'est ce que les équations (10) nous permettent de faire.

Ces équations nous donnent en effet les λ en fonction des γ. Dans les équations (10) entrent trois irrationalités; nous avons en effet quatre radicaux ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 dont le produit est rationnel, mais qui sont d'ailleurs indépendants. Mais, si l'on introduit entre les γ la relation (12), cette indépendance cesse. En tenant compte de la relation (12) on peut exprimer rationnellement, en fonction des γ, les produits des ρ_i deux à deux.

On obtiendra donc les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et l'on en déduira sous la même forme la valeur de a_4, celles des β_i et celles des b_i.

Toutes les constantes qui entrent dans les formules (13) sont alors déterminées en fonction des γ.

Substituons alors à la place des ξ_i leurs valeurs (13) dans l'équation $P = 0$; nous trouverons une équation qui nous donnera δ, et la valeur de δ ainsi trouvée devra être indépendante de t, u et v et dépendre seulement des γ.

On peut faire ce calcul en donnant à t, u, v des valeurs arbitraires; mais le plus simple est de prendre $t = u = v$; le point qui correspond à $t = u = v$ est un point de la directrice. Voici comment on pourra diriger le calcul :

Nous pouvons, comme je l'ai dit plus haut, remplacer, dans les équations de la quartique Q, la variable t par une autre variable t' liée à la première par une relation homographique. Le plus simple est de prendre

$$t = \xi_4.$$

Les équations de la quartique Q se réduisent à

$$\xi_i = \frac{3\beta_i}{\xi_4 - a_i} + b_i \tag{14}$$

Substituons les valeurs (14) dans l'équation $P = 0$; nous obtiendrons une équation qui nous donnera δ. La valeur trouvée devra être indépendante de ξ_4.

Supposons ξ_4 très grand et développons ξ_i suivant les puissances décroissantes de ξ_4, il viendra

$$\xi_i = b_i + \frac{3\beta_i}{\xi_4} + \ldots.$$

Substituons ces développements à la place de ξ_1, ξ_2, ξ_3.

Dans P, nous obtiendrons un développement procédant suivant les puissances décroissantes de ξ_4, et commençant par un terme en ξ_4; le premier terme du développement est

$$\xi_4[b_1 b_2 b_3 + b_1 + b_2 + b_3]$$

et le second

$$\begin{aligned} 3\beta_1(b_2 b_3 - \gamma_{23}) + 3\beta_2(b_1 b_3 - \gamma_{13}) + 3\beta_3(b_1 b_2 - \gamma_{12}) \\ - \gamma_{14} b_2 b_3 - \gamma_{24} b_1 b_3 - \gamma_{34} b_1 b_2 + \delta. \end{aligned}$$

Ces deux termes doivent s'annuler; le premier s'annule de lui-même quand on y remplace les β et les b par leurs valeurs en fonction des γ; en égalant le second à 0, on aura une équation qui donnera δ.

On trouve aisément

$$\beta_i = -3\gamma_{ii};$$

on obtient aussi, sans peine, les expressions des b_i et, en tenant compte de (12), on a finalement

$$(15) \qquad \delta = \gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{24} + \gamma_{14}\gamma_{23}.$$

Les conditions (12) et (15) sont donc les deux conditions nécessaires pour que $P = 0$ soit l'équation de la variété dont Q est la directrice.

On peut, d'après ce qui précède, obtenir les λ en fonctions rationnelles des γ et de l'un des ρ, et comme ρ est susceptible de deux valeurs égales et de signe contraire, on trouvera pour chacun des λ deux valeurs.

La variété V admet donc deux directrices Q et elle sera, de deux manières différentes, une variété de translation distinguée.

Par raison de symétrie, il est évident qu'on passera d'une des directrices à l'autre en changeant ξ_i en $-\xi_i$.

Ce résultat ne doit pas nous surprendre; et en effet la variété

$$\Theta = 0$$

est aussi, de deux manières différentes, une variété distinguée et elle admet deux directrices qui ont respectivement pour équations

$$u_i = +3v_i, \qquad u_i = -3v_i.$$

Les mêmes considérations peuvent être étendues au cas de $p > 4$.

Le nombre des quantités a_{ik} est égale à

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Celui des modules d'une courbe de genre p est $3p - 3$.

Pour qu'une fonction Θ soit spéciale, il faut donc

$$\frac{p(p+1)}{2} - 3p + 3 = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

Supposons maintenant les termes latéraux très petits, u_i très voisin de α_i et posons

$$u_i = \alpha_i + t\xi_i, \qquad a_{ik} = t^2\gamma_{ik}.$$

Conservons seulement dans le développement de Θ le premier terme qui est en t^p et négligeons les suivants.

L'équation $\Theta = 0$ devient alors celle d'une variété algébrique que j'appelle V et qui est de degré p; le premier membre de l'équation de V contient

$$\frac{p(p-1)}{2}$$

indéterminées qui sont les γ.

Si V est une variété de translation, ce sera une variété de translation distinguée et les équations de sa directrice seront de la forme

$$\xi_i = \frac{p\beta_i}{t - a_i} + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots p). \tag{16}$$

Les équations (16) contiennent $3p$ indéterminées qui sont les β, les a et les b. Si j'exprime que la variété dont la courbe (16) est la directrice admet l'origine pour centre, j'aurai déterminé les b et il me restera $2p$ indéterminées. D'autre part, je puis choisir le paramètre t de telle façon que a_1, a_2, a_3 aient telles valeurs que je veux. Il me reste encore $2p - 3$ arbitraires. Donc, pour que V soit une variété distinguée, il faut

$$\frac{p(p-1)}{2} - (2p-3) = \frac{(p-2)(p-3)}{2}$$

conditions.

C'est le même nombre que plus haut. Quelles sont ces conditions? On voit d'abord que la condition (12) doit encore être remplie, ainsi que toutes celles qu'on en peut déduire par permutations d'indices. Le nombre des conditions ainsi obtenues est égal au nombre des combi-

naisons de p lettres 4 à 4. Ce nombre est plus grand que $\frac{(p-2)(p-3)}{2}$ d'où il suit que ces conditions ne sont pas toutes distinctes.

12. — Cas voisins des cas singuliers abéliens.

Soit $p = 3$, et considérons la fonction Θ.

Si

$$a_{13} = a_{23} = 0,$$

on tombe sur le cas singulier abélien et l'on a

$$\Theta = \theta\theta_3,$$

θ étant une fonction Θ de genre 2 de u_1 et de u_2, et θ_3 une fonction Θ elliptique de u_3.

Supposons maintenant que a_{13} et a_{23} ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$u_2 = a_3 + t\xi, \qquad a_{i3} = t\gamma_i,$$

t étant un paramètre très petit, et développons suivant les puissances de t; il viendra, en négligeant t^2,

$$\Theta = t\theta'_3\left(\theta\xi - \gamma_1\frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2\frac{d\theta}{du_2}\right).$$

Je désigne par θ'_3 ce que devient $\frac{d\theta_3}{du_3}$ quand on y remplace u_4 par α_3.

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(1) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2}.$$

Si l'on regarde ξ, u_1, u_2 comme des coordonnées rectangulaires, l'équation (1) doit être celle d'une surface de translation.

Nous avons vu plus haut à plusieurs reprises, et notamment au § 6 qu'une génératrice d'une surface de translation

$$z = f(x, y)$$

doit avoir pour équation

$$\gamma = \alpha \frac{df}{dx} + \beta \frac{df}{dy},$$

α, β, γ étant des constantes.

Si donc nous posons

$$\frac{d^2 \log \theta}{du_1^2} = \mathrm{R}, \qquad \frac{d^2 \log \theta}{du_1\, du_2} = \mathrm{S}, \qquad \frac{d^2 \log \theta}{du_2^2} = \mathrm{T},$$

nous aurons pour l'équation d'une génératrice de la surface (1),

$$\beta = \alpha_1 \gamma_1 \mathrm{R} + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2)\mathrm{S} + \alpha_1 \gamma_2 \mathrm{T},$$

α_1, α_2 et β étant trois constantes.

Ou bien

$$(2) \qquad \alpha_1 \gamma_1 \mathrm{R}\theta^2 + (\alpha_2 \gamma_1 + \alpha_1 \gamma_2)\mathrm{S}\theta^2 + \alpha_2 \gamma_2 \mathrm{T}\theta^2 - \beta\theta^2 = 0.$$

Or $\mathrm{R}\theta^2$, $\mathrm{S}\theta^2$, $\mathrm{T}\theta^2$, θ^2 sont des fonctions θ de genre 2 et du second ordre ayant mêmes multiplicateurs, appartenant, par conséquent, au même faisceau (toutes ces fonctions sont paires).

Il en est donc de même du premier membre de (2), que j'appellerai

$$\eta(u_i).$$

Notre génératrice a donc pour équation

$$\eta(u_i) = 0.$$

Une autre génératrice aura pour équation

$$(3) \qquad \eta'(u_i) = 0,$$

η' étant une fonction θ ayant mêmes multiplicateurs que η. Mais, comme elle doit être égale à l'autre génératrice, elle devra aussi avoir pour équation

$$(4) \qquad \eta(u_i - h_i),$$

h_1 et h_2 étant deux constantes. Or les fonctions $\eta'(u_i)$ et $\eta(u_i - h_i)$ n'ont pas mêmes multiplicateurs; elles ne peuvent donc être identiques, d'où il résulte que les deux courbes (3) et (4) ne peuvent avoir une partie commune qu'à la condition de se décomposer.

Donc $\eta'(u_i)$, $\eta(u_i - h_i)$ et $\eta(u_i)$ doivent se décomposer en deux facteurs, et l'on aura

$$\eta(u_i) = c\theta(u_i - e_i)\theta(u_i + e_i),$$

c, e_1 et e_2 étant trois constantes. On obtiendra une génératrice en annulant l'un des deux facteurs, c'est-à-dire en faisant $u_i = v_i \pm e_i$: je dirai en faisant $u_i = v_i + e_i$, ce qui ne restreint pas la généralité puisque rien ne distingue e_i de $-e_i$.

Donnons de tout cela une interprétation géométrique. Si R, S et T sont trois coordonnées rectangulaires, le point (R, S, T) sera sur une surface de Kummer; l'équation (2) représentera un plan et pour que la fonction η se décompose, il faut que ce plan soit un plan tangent.

Les génératrices de la surface (1) correspondront donc aux intersections de la surface de Kummer par ses plans tangents, ou plutôt à quelques-unes d'entre elles.

Observons que le plan défini par l'équation (2) est parallèle à la droite

$$(5) \qquad \gamma_1 R + \gamma_2 S = 0, \qquad \gamma_1 S + \gamma_2 T = 0.$$

Les courbes qui, sur la surface de Kummer, correspondent aux génératrices de la surface (1) *sont donc les intersections de cette surface de Kummer avec les plans tangents qui lui sont menés parallèlement à la droite* (5).

La droite (5) se trouve sur le cône du second degré

$$(6) \qquad RT - S^2 = 0.$$

Le plan $\eta = 0$ défini par l'équation (2) est donc tangent à la surface de Kummer en un point M dont les arguments abéliens u_1 et u_2 seront définis par les équations

$$\theta(u_i - e_i) = 0, \qquad \theta(u_i + e_i) = 0.$$

Il est tangent en outre au cylindre N qui est circonscrit à la surface et dont les génératrices sont parallèles à la droite (5).

Au point M je ferai correspondre le point M′ qui a pour arguments abéliens e_1 et e_2 augmentés d'une des dix demi-périodes qui n'annulent pas Θ. Voici quelle en est la signification.

La surface de Kummer est sa propre polaire réciproque par rapport à une quadrique convenablement choisie (et cela de dix manières différentes). Le point M′ sera, d'une de ces dix manières, le réciproque du plan (2), et quand le plan (2) enveloppera le cylindre N, le point M′ décrira une certaine courbe plane Q dont le plan sera le réciproque du point à l'infini défini par les équations (5).

Étudions cette courbe Q.

Supposons que l'on ait mis les équations de la surface (1) sous la forme translative

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t').$$

On aura l'équation d'une génératrice en donnant, soit à t soit à t', une valeur constante; mais nous avons trouvé pour l'équation d'une génératrice

$$\theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où

$$u_i = v_i + e_i.$$

On aura donc, si la génératrice a été obtenue en faisant $t' = \text{const.}$,

$$f_i(t) - v_i = e_i - f_i'(t') = \text{const.}$$

On trouverait de même, en considérant la génératrice obtenue en faisant $t = \text{const.}$,

$$f_i'(t') - v_i' = \text{const.},$$

d'où

$$u_i = f_i(t) + f_i'(t') = v_i + v_i' + \text{const.};$$

j'appellerai k_i la constante du second membre et j'écrirai

$$u_i = v_i + v_i' + k_i,$$

d'où

$$e_i = v_i' + k_i.$$

Or la courbe Q a pour équation

$$u_i = e_i + \varpi_i,$$

ϖ_i étant une demi-période. Cette équation peut s'écrire

$$u_i = v'_i + k_i + \varpi_i,$$

$k_i + \varpi_i$ est une constante, v'_i est une fonction de x', x' étant un des points de la courbe C.

Donc la courbe Q est plane et son plan doit être tangent à la surface de Kummer.

Le point à l'infini dans la direction (5) qui est le réciproque de ce plan, doit se trouver sur cette surface.

La conique à l'infini, définie par l'équation (6), est donc sur la surface; c'est donc une des seize coniques singulières de la surface.

Pour achever l'étude des génératrices, reprenons la surface

$$(1) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} = \Phi(u_i).$$

On obtiendra l'équation complète d'une génératrice en adjoignant à l'équation (1) l'équation

$$(7) \qquad \theta(u_i - e_i) = 0,$$

d'où l'on tire

$$u_i = v_i + e_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e_i).$$

Une autre génératrice aura pour équations

$$u_i = v_i + e'_i, \qquad \xi = \Phi(v_i + e'_i),$$

et, comme elles doivent être égales, on devra avoir

$$\Phi(v_i + e'_i) - \Phi(v_i + e_i) = k,$$

k étant une constante. Posons donc

$$\psi(u_i) = \Phi(e'_i + u_i) - \Phi(e_i + u_i) - k.$$

La fonction $\psi(u_i)$ est évidemment une fonction abélienne qui a pour dénominateur

$$\theta(u_i+e_i)\,\theta(u_i+e'_i).$$

Le numérateur doit évidemment être une fonction θ du deuxième ordre appartenant au même faisceau que le dénominateur.

D'autre part, le numérateur doit s'annuler pour $u_i = v_i$, c'est-à-dire pour $\theta'(u_i) = 0$.

Il se décompose donc en deux facteurs; un de ces facteurs doit être $\theta(u_i)$ et il est aisé d'en déduire l'autre facteur. On aura donc

$$(8)\qquad \psi(u_i) = \frac{M\,\theta(u_i)\,\theta(u_i+e_i+e'_i)}{\theta(u_i+e_i)\,\theta(u_i+e'_i)},$$

M étant un facteur constant.

L'étude de cette identité conduirait sans doute à des résultats intéressants, mais je ne l'entreprendrai pas; cela m'entraînerait trop loin.

Je me bornerai à résumer cette discussion; pour avoir les équations des génératrices, on posera

$$u_i = v_i + v'_i + k_i,$$

k_i étant la constante définie plus haut; si sur la courbe C on envisage deux points x et x', l'intégrale v_i sera fonction de x et l'intégrale v'_i de x'; on obtiendra alors toutes les génératrices en faisant, soit $x = \text{const.}$, soit $x' = \text{const.}$ On voit en même temps que la surface (1) est une surface de translation distinguée.

La conique définie par l'équation (6) est l'une des coniques singulières de la surface de Kummer et comme elle est rejetée à l'infini, si l'on considère R, S et T comme des coordonnées rectangulaires, elle est dans le plan

$$\theta^2 = 0.$$

Son équation se réduit donc à $u_i = v_i$, c'est-à-dire que, au point à l'infini dans la direction (5), on doit avoir

$$u_i = -v_i^0,$$

x_0 étant un point fixe de C et v_i^0 la valeur correspondante de l'intégrale v_i (je pourrais aussi bien écrire $u_i = + v_i^0$, car l'équation $\theta = 0$ est aussi bien équivalente à $u_i = + v_i$ qu'à $u_i = - v_i$).

D'autre part, l'équation de notre génératrice sera

$$u_i = v_i + e_i.$$

La courbe qui correspond à cette génératrice sur la surface de Kummer devra passer par le point à l'infini dans la direction (5), puisque cette courbe est l'intersection à la surface avec un plan tangent passant par ce point.

Il existera donc sur la courbe C un point x_2, tel que

$$v_i^2 + e_i = - v_i^0 \qquad [v_i^2 = v_i(x_2)].$$

Il existera aussi sur C un point x', tel que

$$v_i' = - v_i^2 \qquad [v_i' = v_i(x')].$$

La courbe C est une courbe plane du quatrième degré à point double: la droite qui joint x' à x_2 va passer par ce point double. Il vient alors

$$e_i = v_i' - v_i^0$$

et pour l'équation de notre génératrice

$$u_i = v_i + v_i' - v_i^0.$$

La quantité que nous avons appelée plus haut k_i est donc égale à $-v_i^0$.

Soit maintenant $p = 4$ et considérons une fonction Θ spéciale. Si l'on avait

$$a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0,$$

Θ serait le produit d'une fonction de genre 3 et d'une fonction de genre 1, et l'on aurait

$$\Theta = \theta\theta_4,$$

θ dépendant de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

Supposons maintenant que a_{14}, a_{24}, a_{34} ne soient pas nuls, mais très petits, de façon qu'on se trouve dans un cas voisin du cas abélien. Posons

$$(9) \qquad u_4 = \alpha_4 + t\xi, \qquad a_{i4} = t\gamma_i$$

et développons Θ en négligeant t^2, il viendra

$$\Theta = t\theta'_4\left(\theta\xi - \gamma_1\frac{d\theta}{du_1} - \gamma_2\frac{d\theta}{du_2} - \gamma_3\frac{d\theta}{du_3}\right).$$

L'équation $\Theta = 0$ se réduit à

$$(10) \qquad \xi = \frac{\gamma_1}{\theta}\frac{d\theta}{du_1} + \frac{\gamma_2}{\theta}\frac{d\theta}{du_2} + \frac{\gamma_3}{\theta}\frac{d\theta}{du_3} = F(u_1, u_2, u_3),$$

ce doit être l'équation d'une variété de translation.

Mettons les équations de cette variété sous forme translative :

$$u_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t'') \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_4(t) + f'_4(t') + f''_4(t''),$$

t, t', t'' sont trois variables auxiliaires qui n'ont rien de commun, d'ailleurs, avec la variable t qui entre dans les équations (9). On obtiendrait une génératrice en donnant à t' et à t'' des valeurs constantes; si l'on donne à t'' seulement une valeur constante, on obtiendra un faisceau de génératrices dont l'équation peut être mise sous la forme suivante. Soit, pour cette valeur constante de t'',

$$\frac{df''_i}{dt''} = \beta_i.$$

les β_i seront des constantes.

L'équation du faisceau de génératrices pourra s'écrire

$$(11) \qquad \beta_1\frac{dF}{du_1} + \beta_2\frac{dF}{du_2} + \beta_3\frac{dF}{du_3} - \beta_4 = 0.$$

Or

$$\theta^2, \quad \frac{dF}{du_1}\theta^2, \quad \frac{dF}{du_2}\theta^2, \quad \frac{dF}{du_3}\theta^2$$

sont des fonctions θ qui ont mêmes multiplicateurs. Le produit du premier membre de (11) par θ^2 sera donc une fonction η ayant mêmes multiplicateurs que θ^2. L'équation (11) devient donc

$$\eta(u_i) = 0.$$

Un autre faisceau de génératrices devrait avoir pour équation

$$\eta'(u_i) = 0,$$

η' ayant mêmes multiplicateurs que η. D'autre part, il devrait avoir pour équation

$$\eta(u_i - k_i) = 0,$$

les k_i étant des constantes. Il en résulte que η doit se décomposer et qu'on doit avoir

$$\eta = \theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Comme rien ne distingue e_i de e_i, je puis dire que l'équation d'un faisceau de génératrices s'écrit

$$\theta(u_i - e_i) = 0. \tag{12}$$

On déduit de là

$$u_i = v_i + v_i' + e_i \tag{13}$$

ou bien

$$u_i = -v_i'' - v_i''' + e_i, \tag{14}$$

v_i, v_i', v_i'', v_i''' sont les valeurs de l'intégrale v_i qui correspondent à quatre points de la courbe C, que j'appelle x, x', x'', x'''.

On voit ainsi que la surface (12) est de deux manières différentes une surface de translation, et que ces deux manières sont définies respectivement par les équations (13) et (14).

D'autre part, on peut écrire les équations de la surface (12) sous la

forme

$$(15) \qquad u_i = f_i(t) + f'_i(t') + f''_i(t''),$$

où t'' et, par conséquent, $f''_i(t'')$ sont des constantes.

On peut alors faire trois hypothèses

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (13), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = v_i + \text{const.}, \qquad f'_i(t') = v'_i + \text{const.}$$

Ou bien les équations (15) sont équivalentes aux équations (14), c'est-à-dire que l'on a

$$f_i(t) = -v''_i + \text{const.}, \qquad f'_i(t') = -v'''_i + \text{const.}$$

Ou enfin les équations (15) définissent une troisième manière pour la surface (12) d'être de translation.

Cette troisième hypothèse doit être rejetée; on pourrait sans doute démontrer que la surface (12) ne peut être de translation que de deux manières. Mais on peut se dispenser de cette vérification.

Rappelons-nous en effet notre point de départ. Nous avons envisagé d'abord une fonction Θ spéciale de genre 4. L'équation

$$\Theta = 0$$

représente alors une variété de translation dont les génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.},$$

v_i étant une des intégrales abéliennes de première espèce afférentes à la courbe C de genre 4 qui engendre la fonction spéciale Θ.

Nous avons supposé ensuite que a_{14}, a_{24}, a_{34} étaient des infiniment petits et, négligeant des termes d'ordre supérieur, nous avons réduit l'équation $\Theta = 0$ à la forme (10).

Mais, quand a_{14}, a_{24}, a_{34} s'annulent, la courbe C qui était de genre 4 se décompose en deux autres, l'une de genre 3 correspondant à la fonction θ, l'autre de genre 1 correspondant à la fonction θ_4.

Rappelons-nous que θ dépend seulement de u_1, u_2, u_3 et θ_4 de u_4.

La variété $\Theta = 0$ reste de translation et l'équation de ses génératrices conserve la forme

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

Si $i = 1$, 2 ou 3, v_i devra être l'une des intégrales abéliennes de première espèce qui se rapportent à l'une des composantes de la courbe C, à celle qui est de genre 3 et qu'engendre la fonction θ.

Ainsi la variété (10) peut être regardée comme de translation et de telle façon que ses génératrices aient pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

La première hypothèse est donc réalisée.

Observons en passant que la seconde l'est également. En effet, la variété $\Theta = 0$ est *de deux manières différentes* une variété de translation. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.}$$

De la seconde manière elles ont pour équations

$$u_i = - v_i + \text{const.}$$

A la limite, la variété (10) sera de translation de deux manières différentes. De la première manière ses génératrices ont pour équations

$$u_i = v_i + \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

De la seconde elles ont pour équations

$$u_i = - v_i + \text{const.}$$

Nous nous en tiendrons à la première manière.

Alors les équations de la variété (10), mises sous forme translative, s'écriront

$$u_i = v_i + v_i' + v_i'' + k_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\xi = f_4(x) + f_4'(x') + f_4''(x'').$$

Les k_i sont des constantes; x, x', x'' sont trois points de la courbe C de genre 3 qui engendre θ; v_i, v_i', v_i'' sont les valeurs correspondantes de l'intégrale de première espèce v_i.

Puisque l'on a d'autre part

$$u_i = v_i + v_i' + e_i,$$

on aura donc

$$e_i = v_i'' + k_i.$$

Comme rien ne distingue le point x'' du point x, nous pouvons supprimer les accents et écrire

$$e_i = v_i + k_i. \tag{16}$$

Nous avons dit plus haut que le premier membre de l'équation (11) peut se décomposer en deux facteurs et s'écrire

$$\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i).$$

Mais ce produit peut se mettre sous une forme particulière.

Posons, pour plus de symétrie dans les notations,

$$\theta^2(u_i) = \zeta_1(u_i).$$

Je désignerai d'autre part par $\zeta_k(u_i)$, $(k = 2, 3, \ldots, 7)$ les six dérivées secondes de $\log\theta$ multipliées par $\theta^2(u_i)$.

Par exemple ζ_2, ζ_3, ζ_4 seront formées avec les dérivées secondes prises deux fois respectivement par rapport à u_1, à u_2 et à u_3; ζ_5, ζ_6, ζ_7 seront formées avec les dérivées secondes prises respectivement par rapport à u_2 et u_3, à u_1 et u_3, à u_1 et u_2.

Les fonctions $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_7$ ont mêmes multiplicateurs et appartiennent au même faisceau.

Soit ζ_8 une huitième fonction quelconque linéairement indépendante des premières et appartenant aussi au même faisceau.

On démontre que

$$\left\{\begin{aligned} &\theta(u_i - e_i)\,\theta(u_i + e_i) \\ &\quad = \zeta_1(u_i)\zeta_1'(e_i) + \zeta_2(u_i)\zeta_2(e_i) + \ldots + \zeta_8(u_i)\zeta_8'(e_i). \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les fonctions $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_8$ sont des combinaisons linéaires de $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_8$; ce sont donc encore des fonctions appartenant au même faisceau que θ^2.

Quand on fait là-dedans

$$e_i = v_i + k_i,$$

l'expression (17) doit (à un facteur constant près qui, étant arbitraire, peut être supposé égal à 1) se réduire au premier membre de (11) multiplié par θ^2.

Or

$$\theta^2 \frac{d\mathrm{E}}{du_1} = \gamma_1 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_7 + \gamma_3 \zeta_6,$$

$$\theta^2 \frac{d\mathrm{E}}{du_2} = \gamma_1 \zeta_7 + \gamma_2 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_5,$$

$$\theta^2 \frac{d\mathrm{E}}{du_3} = \gamma_1 \zeta_6 + \gamma_2 \zeta_5 + \gamma_3 \zeta_1.$$

On a donc, pour $e_i = v_i + k_i$,

$$\zeta'_8 = 0, \qquad \zeta'_2 = \beta_1 \gamma_1, \qquad \zeta'_3 = \beta_2 \gamma_2, \qquad \zeta'_4 = \beta_3 \gamma_3,$$
$$\zeta'_5 = \beta_2 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_2, \qquad \zeta'_6 = \beta_1 \gamma_3 + \beta_3 \gamma_1, \qquad \zeta'_7 = \beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1;$$

d'où

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\gamma_2^2 \zeta'_2 - \gamma_1 \gamma_2 \zeta'_7 + \gamma_1^2 \zeta'_3 = 0, \\ &\gamma_3^2 \zeta'_3 - \gamma_2 \gamma_3 \zeta'_5 + \gamma_2^2 \zeta'_4 = 0, \\ &\gamma_1^2 \zeta'_4 - \gamma_3 \gamma_1 \zeta'_6 + \gamma_3^2 \zeta'_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

D'après le n° **47**, quand on fait $e_i = v_i + k_i$, il y a

$$n^p + p - np - 1$$

fonctions du faisceau qui s'annulent identiquement. Ici $n = 2$, $p = 3$: il y a donc dans le faisceau quatre fonctions linéairement indépendantes qui s'annulent identiquement. Ces quatre fonctions doivent être ζ'_8 et les premiers membres des trois équations (18).

Nous définirons donc les trois constantes k_1, k_2, k_3 par la condition suivante :

$$\zeta'_8(v_i + k_i)$$

devra être nul quel que soit le point x de la courbe C auquel correspond l'intégrale c_i.

L'ensemble des valeurs de k_1, k_2, k_3 formera une certaine variété.

Cette variété ne peut avoir trois dimensions; sans cela ζ'_8 devrait être identiquement nul, ce qui ne peut avoir lieu. En effet, nous avons désigné par $\theta(u)$ la fonction

$$\Sigma e^{m_1u_1+m_2u_2+m_3u_3+P},$$

où P est une certaine forme quadratique par rapport aux m_i dont les coefficients dépendent des périodes.

Considérons maintenant les séries

$$\Sigma e^{m_1u_1+m_2u_2+m_3u_3+\frac{1}{2}P}, \tag{19}$$

où je ne donnerai à m_1 que des valeurs paires ou que des valeurs impaires; de même je ne donnerai à m_2 que des valeurs paires, ou seulement des valeurs impaires; de même pour m_3.

Cela fait deux hypothèses pour m_1, deux pour m_2, deux pour m_3; en tout $2^3 = 8$ hypothèses. On peut donc former huit séries (19). Ce sont des fonctions θ du deuxième ordre ayant mêmes multiplicateurs.

Je les désignerai par

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \ldots, \quad \eta_8.$$

On a alors

$$\begin{aligned}&\theta(u_i - e_i)\theta(u_i + e_i)\\ &\quad = \eta_1(u_i)\eta_1(e_i) + \eta_2(u_i)\eta_2(e_i) + \ldots + \eta_8(u_i)\eta_8(e_i).\end{aligned}$$

Les $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_8$ s'exprimeront linéairement à l'aide des ζ et l'on aura

$$\eta_k = G_{1.k}\zeta_1 + G_{2.k}\zeta_2 + \ldots + G_{8.k}\zeta_8 \tag{19}$$

et l'on déduit de là

$$\zeta'_8(e_i) = G_{8.1}\eta_1(e_i) + G_{8.2}\eta_2(e_i) + \ldots + G_{8.8}\eta_8(e_i). \tag{20}$$

Il ne peut pas arriver que l'on ait à la fois

$$G_{8.1} = G_{8.2} = \ldots = G_{8.8} = 0,$$

sans quoi les équations (19) montreraient que les η_k ne sont pas linéairement indépendants, ce qui n'a pas lieu.

Il ne peut pas arriver non plus que, les huit constantes $G_{8.k}$ n'étant pas nulles à la fois, ζ'_8 soit identiquement nul, sans quoi l'équation (20) exprimerait à son tour que les η_k ne sont pas linéairement indépendants.

Ainsi la variété formée par les k_i ne peut pas avoir trois dimensions : elle ne peut pas non plus en avoir deux.

Pour qu'elle en eût deux, il faudrait que les deux équations

$$\zeta'_8(v_i^0 + k_i) = 0, \qquad \zeta'_8(v_i^1 + k_i) = 0,$$

(où v_i^0 et v_i^1 sont deux valeurs particulières de v_i) fussent identiques, ou au moins que les premiers membres de ces deux équations se décomposassent en plusieurs facteurs et qu'un facteur fût commun à ces deux premiers membres. Il faudrait donc que, si

$$\varphi(v_i^0 - k_i)$$

est ce facteur, ce facteur ne changeât pas quand on y remplace v_i^0 par une autre valeur de v_i.

Cela est évidemment impossible.

Supposons donc maintenant que la variété des k_i ait une dimension seulement. Nous regarderons par conséquent k_1, k_2 et k_3 comme des fonctions d'une variable unique que j'appellerai z. Comme les v_i dépendent de x, les $v_i + k_i$ sont des fonctions de x et de z.

Il y a, d'après ce que nous avons vu, trois combinaisons linéaires de $\zeta'_1, \zeta'_2, \ldots, \zeta'_7$ qui sont identiquement nulles quand on y remplace les e_i par $v_i + k_i$; expliquons le sens de cette proposition; si je regarde un instant z comme une constante, les k_i seront aussi des constantes; mais v_i dépendant de x, quand on aura remplacé e_i par $v_i + k_i$, les ζ' deviendront aussi des fonctions de x; il y aura entre ces sept fonctions de x trois relations linéaires à coefficients constants. Mais je veux dire par là que ces coefficients ne dépendent pas de x; ils dépendront, au contraire, de z.

Ces trois relations linéaires doivent être les équations (18). Nous voyons donc que $\gamma_1^2, \gamma_1\gamma_2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \ldots$ sont des fonctions de z.

Si l'on élimine z entre ces équations, on obtiendra une relation entre $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ et $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$. *C'est cette relation qui exprime que la fonction* Θ *est spéciale.*

Il reste encore à examiner deux hypothèses; on pourrait supposer que la variété des k_i a o dimensions; c'est-à-dire que les k_i peuvent prendre un ou plusieurs systèmes déterminés de valeurs. Alors, en raisonnant comme nous venons de le faire, on verrait que les rapports $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_3}$ devraient prendre aussi des valeurs déterminées. Cela ferait donc deux conditions nécessaires pour que la fonction Θ soit spéciale et nous savons qu'il ne doit y en avoir qu'une.

On pourrait supposer enfin qu'il n'existe pas, en général, de valeurs des k_i telles que

$$\zeta'_8(c_i + k_i)$$

soit identiquement nulle. Il faudrait donc, pour que la fonction Θ soit spéciale, qu'une certaine relation ait lieu entre les périodes

$$a_{ik}(i, k = 1, 2, 3),$$

relation où les γ n'entrent pas. Mais comme il suffit d'une condition pour que la fonction Θ soit spéciale, lorsque la relation dont je viens de parler entre les a_{ik} serait satisfaite, la fonction Θ devrait être spéciale quels que soient les γ. Il faudrait donc que la relation entre les a_{ik} étant satisfaite, la variété des k_i ait deux dimensions et nous venons de voir que cela était impossible.

Les deux hypothèses doivent donc être rejetées l'une et l'autre.

Je m'arrête, quoique je n'aie fait qu'effleurer mon sujet; la considération des variétés de translation m'a donné un moyen d'exprimer la condition pour qu'une fonction Θ soit spéciale, mais je ne l'ai appliqué qu'à des cas très particuliers.

Il y a lieu d'espérer qu'en l'appliquant au cas général on obtiendra des résultats dignes d'intérêt. De même, j'ai dû passer très rapidement sur le cas voisin du cas singulier abélien qui a fait l'objet du présent paragraphe; mais je crois qu'il y a là un joli sujet de thèse.

Mémoire sur les permutations quasi-alternées;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

INTRODUCTION.

I. — Définitions préliminaires.

1. Considérons une permutation quelconque des n premiers nombres; et, dans cette permutation, retranchons chaque nombre du suivant. Nous obtenons une suite de $n-1$ différences, les unes positives, les autres négatives.

La permutation considérée est *alternée*, lorsque cette suite de $n-1$ différences ne présente que des variations.

La permutation est *quasi-alternée*, lorsque cette suite présente une permanence, et une seule.

2. D'après la définition des *maxima* et des *minima* que nous avons donnée dans notre *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations* (¹), nous pouvons dire aussi :

Une permutation des n premiers nombres est alternée, lorsque tous les nombres qui la composent sont des maxima ou des minima;

Une permutation des n premiers nombres est quasi-alternée,

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, avril 1884.

lorsque, parmi les nombres qui la composent, il y en a un, et un seul, qui n'est ni un maximum ni un minimum.

3. On peut dire enfin, d'après la définition des *séquences* que nous avons donnée dans cette même *Étude :*

Les permutations alternées des n premiers nombres sont celles qui présentent chacune $n - 1$ séquences;

Les permutations quasi-alternées, celles qui en présentent chacune $n - 2$.

4. Les trois définitions qui précèdent sont équivalentes. A l'aide de l'une quelconque d'entre elles, on peut vérifier facilement que, parmi les permutations des huit premiers nombres,

$$3 \quad 1 \quad 4 \quad 2 \quad 6 \quad 5 \quad 8 \quad 7$$

est une permutation alternée; tandis que

$$3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 7 \quad 6 \quad 8$$

est une permutation quasi-alternée.

II. — Objet du présent Mémoire.

5. Nous nous sommes occupés, à deux reprises différentes, des permutations alternées des n premiers nombres.

En 1881, dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1), nous avons fait connaître les propriétés et la fonction génératrice du nombre de ces permutations.

En 1883, dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (2), nous avons déterminé la probabilité pour qu'une permutation donnée des n premiers nombres fût une permutation alternée.

---

(1) *Mémoire sur le nombre des permutations alternées.*

(2) *Probabilité pour qu'une permutation...* (Séance du 5 novembre).

6. Dans le présent Mémoire, nous traitons ces mêmes questions, en une seule fois, pour les permutations quasi-alternées des n premiers nombres.

Considérant ces permutations quasi-alternées, nous choisissons nos notations et établissons notre formule fondamentale; nous déterminons les fonctions génératrices des nombres de ces permutations; nous donnons différentes relations entre ces fonctions et entre ces nombres; nous cherchons les propriétés asymptotiques de ces mêmes nombres lorsque n croît indéfiniment; nous trouvons enfin la probabilité pour qu'une permutation soit quasi-alternée, et nous faisons connaître la valeur asymptotique de cette probabilité.

7. Dans toutes les parties de ce travail, nous nous appuyons, d'une part, sur les résultats que nous avons obtenus touchant les permutations alternées; de l'autre, sur ceux que nous ont fournis nos recherches, soit anciennes, soit récentes, sur la théorie générale de la structure des permutations.

Nous arrivons par cette voie, relativement aux permutations quasi-alternées, à des propositions assez nombreuses, entièrement nouvelles, et qui nous paraissent intéressantes. Nous avons énoncé, pour la première fois, les principales d'entre elles dans une Note succincte, présentée à l'Académie des Sciences le 3 décembre 1894.

CHAPITRE I.

NOTATIONS ET FORMULE FONDAMENTALE.

I. — Notations.

8. Dans tous nos Mémoires sur les permutations, nous avons désigné par $P_{n,s}$ le nombre des permutations des n premiers nombres qui présentent chacune s séquences.

Parmi les permutations des n premiers nombres, les permutations alternées, sont, avons-nous dit (**5**), celles qui présentent chacune $n-1$ séquences. Leur nombre sera donc désigné par $P_{n,n-1}$.

Parmi les permutations des n premiers nombres, les permutations quasi-alternées sont, avons-nous dit encore (**5**), celles qui présentent chacune $n-2$ séquences. Leur nombre sera donc désigné par $P_{n,n-2}$.

9. Nous avons appelé *triangle des séquences* (¹) le triangle

$$\begin{array}{llll}
P_{2,1}, & & & \\
P_{3,1}, & P_{3,2}, & & \\
P_{4,1}, & P_{4,2}, & P_{4,3}, & \\
P_{5,1}, & P_{5,2}, & P_{5,3}, & P_{5,4}, \\
\multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,}
\end{array}$$

où le nombre $P_{n,s}$ se trouve à la rencontre de la colonne de rang s avec la ligne de rang $n-1$.

On voit immédiatement, sur ce triangle, que les nombres des permutations alternées occupent, dans leurs lignes respectives, chacun la dernière place : ils constituent tous ensemble l'hypoténuse indéfinie du triangle.

On voit également que les nombres des permutations quasi-alternées, dans leurs lignes respectives, occupent chacun l'avant-dernière place; ils constituent tous ensemble la première parallèle à cette hypoténuse.

10. A l'aide de la considération des permutations symétriques, nous avons démontré (²) que $P_{n,s}$ est toujours un nombre pair. Il en est ainsi, en particulier, pour le nombre $P_{n,n-1}$ des permutations alternées et pour le nombre $P_{n,n-2}$ des permutations quasi-alternées.

Dans notre *Mémoire sur les permutations alternées*, par applica-

---

(¹) *Étude sur les maxima, minima, ...*

(²) *Étude sur les maxima, minima, ...*

tion de cette remarque, nous avons posé

$$P_{n,n-1} = 2A_n.$$

Nous posons à présent, de la même manière,

$$P_{n,n-2} = 2B_n.$$

11. Les entiers A forment la suite indéfinie

$$A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \quad \ldots.$$

Le premier d'entre eux est A_2. Les symboles A_0, A_1 ne présentent par eux-mêmes aucun sens; on peut donc, par convention, leur donner des valeurs arbitraires : nous leur avons donné [1], à l'un et à l'autre, pour valeur l'unité.

De même, les entiers B forment la suite indéfinie

$$B_3, \quad B_4, \quad B_5, \quad B_6, \quad \ldots.$$

Le premier d'entre eux est B_3. Les symboles B_0, B_1, B_2 n'ont par eux-mêmes aucun sens; on peut donc leur donner des valeurs arbitraires : pour des raisons que nous dirons bientôt, nous leur donnerons les valeurs -1, -1, 0.

II. — Formule fondamentale.

12. Pour étudier les nombres des permutations quasi-alternées, il nous suffit évidemment d'envisager les moitiés B de ces nombres.

Nous commencerons cette étude en cherchant une formule reliant les nombres B, qui nous sont encore inconnus, aux nombres A, dont nous nous sommes déjà occupé.

13. Nous pourrions obtenir cette formule par des raisonnements directs, identiques, pour ainsi dire, à ceux dont nous nous sommes servis [2] pour établir la relation principale de la théorie des sé-

---

[1] *Mémoire sur les permutations alternées.*

[2] *Étude sur les maxima, minima, ...*

quences. Malgré l'intérêt que présentent toujours les raisonnements combinatoires directs, nous n'opérerons point ainsi. Nous trouvons à la fois plus facile et plus rapide de partir de cette relation principale elle-même, et d'en déduire, comme cas particulier, la formule que nous nous proposons d'établir.

14. Notre relation principale est la relation

$$P_{n,s} = sP_{n-1,s} + 2P_{n-1,s-1} + (n-s)P_{n-1,s-2},$$

où n et s sont quelconques.

Remplaçons-y simultanément n par $n+1$, et s par n, elle devient

$$P_{n+1,n} = nP_{n,n} + 2P_{n,n-1} + P_{n,n-2}.$$

Mais il n'existe aucune permutation contenant autant de séquences que d'éléments. Donc $P_{n,n}$ est toujours nul, et la relation précédente se réduit à

$$P_{n+1,n} = 2P_{n,n-1} + P_{n,n-2}.$$

Mais nous avons posé plus haut

$$P_{n,n-1} = 2A_n, \qquad P_{n,n-2} = 2B_n.$$

Donc, finalement,

$$A_{n+1} = 2A_n + B_n.$$

Telle est notre *formule fondamentale*.

15. Résolue par rapport à B_n, cette formule nous donne

$$B_n = A_{n+1} - 2A_n.$$

Elle nous permettrait évidemment, si la suite indéfinie des entiers A était écrite sur une ligne, d'écrire aussitôt sur une autre la suite indéfinie des entiers B.

Elle suppose, d'ailleurs, que n soit égal ou supérieur à 3. Néanmoins, pour obtenir les valeurs qu'il convient d'attribuer aux sym-

boles B_0, B_1, B_2, qui par eux-mêmes n'ont aucun sens, nous y remplacerons successivement n par 0, par 1 et par 2.

Ces substitutions nous donnent trois égalités, d'où nous tirons

$$B_0 = -1, \qquad B_1 = -1, \qquad B_2 = 0.$$

puisque A_0, A_1, A_2 et A_3 ont pour valeurs respectives 1, 1, 1 et 2.

16. Nous croyons devoir donner ici les valeurs des premiers nombres A et celles des premiers nombres B.

Les valeurs de A_0, A_1, A_2, ..., A_8 sont respectivement

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 16, \quad 61, \quad 272, \quad 1385:$$

celles de B_0, B_1, B_2, ..., B_8 sont respectivement

$$-1, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 6, \quad 29, \quad 150, \quad 841, \quad 5166.$$

Tous ces nombres, d'ailleurs, sauf A_0, A_1, B_0, B_1, B_2, ont chacun leurs doubles dans le triangle des séquences.

CHAPITRE II.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES.

I. — Fonction génératrice de B_n.

17. Dans notre *Mémoire sur les permutations alternées*, nous avons démontré que la série entière

$$A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

n'était autre chose que le développement de $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ suivant les puissances croissantes de la variable x.

18. Il suit de là que cette série entière est convergente toutes les fois que x, en valeur absolue, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Il s'ensuit aussi que la série

$$A_1 + A_2 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

dont les termes sont les dérivées, par rapport à x, des termes de la précédente, est convergente pour les mêmes valeurs de x; et qu'elle a pour somme la dérivée de $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$, par rapport à x, c'est-à-dire la fonction

$$\frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

19. Cela posé, reportons-nous (**15**) à la formule qui nous donne B_n à l'aide de A_n et de A_{n+1}. Si l'on en multiplie les deux membres par $\frac{x^n}{n!}$, on trouve

$$B_n \frac{x^n}{n!} = A_{n+1} \frac{x^n}{n!} - 2 A_n \frac{x^n}{n!};$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\sum_0^\infty {}_n B_n \frac{x^n}{n!} = \sum_0^\infty {}_n A_{n+1} \frac{x^n}{n!} - 2 \sum_0^\infty {}_n A_n \frac{x^n}{n!}.$$

Or, d'après ce qui précède (**17**) et (**18**),

$$\sum_0^\infty {}_n A_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

$$\sum_0^\infty {}_n A_n \frac{x^n}{n!} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Par conséquent

$$\sum_0^\infty {}_n B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2} \operatorname{séc}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right);$$

ou bien, après simplifications,

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{n} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

20. Le premier membre de cette dernière égalité n'est autre chose que la série

$$B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Cette série est donc le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fonction placée au second membre.

De là ce théorème :

La fraction

$$\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}$$

est la fonction génératrice des nombres B_n.

21. Ce résultat peut aussi, évidemment, s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de n éléments est égal au coefficient de $\frac{x_n}{n!}$ dans le développement, suivant les puissances croissantes de x, de la fraction*

$$2\,\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x},$$

qui est le double de la fraction considérée plus haut (**20**);

2° *Cette fraction double est la fonction génératrice des nombres des permutations quasi-alternées.*

II. — Fonctions génératrices de $B_{2\nu}$ et de $B_{2\nu+1}$.

22. Pour obtenir la fonction génératrice des nombres $B_{2\nu}$ et celle des nombres $B_{2\nu+1}$, nous pourrions nous servir de la fonction géné-

ratrice des nombres $A_{2\nu}$ et de celle des nombres $A_{2\nu+1}$, que nous avons déterminées dans notre Mémoire *Sur les permutations alternées*.

Nous préférons tirer ces deux fonctions génératrices de la fonction génératrice trouvée précédemment (**20**) pour les nombres B_n.

23. Considérons d'abord les deux séries

$$B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

$$B_0 - B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} - B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

dont la seconde se déduit de la première par le changement du signe de la variable.

D'après ce qui précède (**18**), cette seconde série est, comme la première, convergente toutes les fois que la valeur absolue de x est inférieure à $\frac{\pi}{2}$.

24. Si l'on désigne, pour abréger, par $\Phi(x)$ la fonction génératrice des nombres B_n, c'est-à-dire la somme de la première des deux séries qu'on vient d'écrire, la somme de la seconde sera évidemment $\Phi(-x)$.

D'ailleurs, d'après ce qu'on a déjà vu (**20**),

$$\Phi(x) = \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

Il s'ensuit immédiatement

$$\Phi(-x) = \frac{1 - 2\cos x}{1 + \sin x}.$$

25. Ajoutons termes à termes les deux séries écrites ci-dessus (**23**). Nous obtenons, après division par 2, la série

$$B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

qui ne présente plus comme coefficients que les nombres $B_{2\nu}$; qui est

convergente dans les mêmes circonstances que les deux séries ajoutées, et qui a évidemment pour somme l'expression

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x)+\Phi(-x)].$$

Or, si l'on calcule cette expression, on trouve, après simplifications, le produit

$$(\sec x - 2)\sec x.$$

Donc notre dernière série n'est autre chose que le développement de ce produit suivant les puissances croissantes de x. De là ce théorème :

Le produit

$$(\sec x - 2)\sec x$$

est la fonction génératrice des nombres $B_{2\nu}$.

26. Ce résultat peut aussi s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de* 2ν *éléments est égal au coefficient de* $\frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$ *dans le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *du produit*

$$2(\sec x - 2)\sec x,$$

qui est le double du produit considéré plus haut (**25**) ;

2° *Ce produit double est la fonction génératrice du nombre des permutations quasi-alternées de* 2ν *éléments.*

27. Revenons aux deux séries que nous avons ajoutées termes à termes (**25**), et retranchons termes à termes la seconde de la première. Nous trouvons, après division par 2, la série

$$B_1\frac{x}{1!}+B_3\frac{x^3}{3!}+B_5\frac{x^5}{5!}+\ldots.$$

qui ne présente plus comme coefficients que les nombres $B_{2\nu-1}$: qui est convergente dans les mêmes circonstances que les séries d'où on

l'a tirée, et qui a évidemment pour somme l'expression

$$\tfrac{1}{2}[\Phi(x) - \Phi(-x)].$$

Or, si l'on calcule cette expression, on obtient, après simplifications, le produit

$$(\text{séc}\,x - 2)\,\text{tang}\,x.$$

Donc notre dernière série n'est autre chose que le développement de ce produit suivant les puissances croissantes de x. De là ce théorème :

Le produit

$$(\text{séc}\,x - 2)\,\text{tang}\,x$$

est la fonction génératrice des nombres $B_{2\nu+1}$.

28. Ce nouveau résultat peut aussi s'énoncer de ces deux manières :

1° *Le nombre des permutations quasi-alternées de* $2\nu + 1$ *éléments est égal au coefficient de* $\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$ *dans le développement, suivant les puissances croissantes de* x, *du produit*

$$2(\text{séc}\,x - 2)\,\text{tang}\,x,$$

qui est le double du produit considéré plus haut (**27**);

2° *Ce produit double est la fonction génératrice du nombre des permutations quasi-alternées de* $2\nu + 1$ *éléments.*

CHAPITRE III.

RELATIONS DIVERSES.

I. — Relations entre différentes séries.

29. Avant tout, pour abréger, nous posons

$$A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots = \Phi(x),$$

$$A_0 + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + A_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots = \varphi_0(x),$$

$$A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + A_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots = \varphi_1(x);$$

$$B_0 + B_1 \frac{x}{1!} + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots = \Psi(x),$$

$$B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + B_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots = \psi_0(x),$$

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + B_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots = \psi_1(x).$$

30. Dans ces six égalités, les séries formant les premiers membres sont convergentes toutes les fois que x, en valeur absolue, est inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Les fonctions qui en forment les seconds membres sont donc, lorsque cette condition est remplie, les sommes de ces différentes séries.

On peut dire aussi que les fonctions

$$\Phi(x), \quad \varphi_0(x), \quad \varphi_1(x)$$

sont les fonctions génératrices respectives des nombres

$$A_n, \quad A_{2\nu}, \quad A_{2\nu+1};$$

et que les fonctions

$$\Psi(x), \quad \psi_0(x), \quad \psi_1(x)$$

sont les fonctions génératrices respectives des nombres

$$B_n, \quad B_{2\nu}, \quad B_{2\nu+1}.$$

D'ailleurs, en écrivant ces fonctions génératrices, nous supprimerons souvent x, nous bornant à écrire

$$\Phi, \quad \varphi_0, \quad \varphi_1; \qquad \Psi, \quad \psi_0, \quad \psi_1.$$

C'est une abréviation et une simplification.

31. Des six fonctions génératrices qui précèdent (**30**), les trois premières se rapportent aux nombres A; les trois dernières aux nombres B.

Nous avons donné les expressions de ces trois premières fonctions il y a déjà plusieurs années [1]. Nous venons de trouver à l'instant celles de ces trois dernières. Tous ces résultats se résument dans ces six égalités

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),\\
\varphi_0(x) &= \operatorname{séc} x,\\
\varphi_1(x) &= \operatorname{tang} x;\\
\Psi(x) &= \frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x},\\
\psi_0(x) &= (\operatorname{séc} x - 2)\operatorname{séc} x,\\
\psi_1(x) &= (\operatorname{séc} x - 2)\operatorname{tang} x.
\end{aligned}$$

32. On peut prendre ces égalités isolément. On peut les combiner aussi soit entre elles, soit avec les développements connus de $\sin x$ et de $\cos x$. En opérant de ces différentes manières, on peut obtenir de nombreuses relations.

Si l'on fait abstraction des trois dernières égalités, on obtient des relations entre les seules fonctions génératrices des nombres A.

Si l'on considère à la fois une, au moins, des trois premières éga-

---

[1] *Mémoire sur les permutations alternées.*

lités, avec une, au moins, des trois dernières, on obtient des relations entre les fonctions génératrices des nombres A et celles des nombres B.

Si l'on considère seulement les trois dernières égalités, on obtient des relations où n'entrent que les fonctions génératrices des nombres B.

33. Nous ne nous occuperons point des relations où ne figurent que les fonctions génératrices des nombres A, parce qu'elles se rapportent uniquement aux permutations alternées que nous avons étudiées autrefois d'une façon particulière.

Mais, parce qu'elles se rapportent, en tout ou en partie, aux permutations quasi-alternées, nous allons donner, d'abord, les plus simples des relations existant entre les fonctions génératrices des nombres A et celles des nombres B; ensuite, les plus simples des relations existant entre les fonctions génératrices des seuls nombres B.

34. Considérons les six égalités écrites précédemment (**34**).

En éliminant les lignes trigonométriques entre la quatrième et la première, nous trouvons la relation

$$2\Psi + 3 = (\Phi - 2)^2.$$

En éliminant ces mêmes lignes entre la deuxième égalité et la cinquième, nous obtenons la relation

$$\psi_0 + 1 = (\varphi_0 - 1)^2.$$

En combinant entre elles la deuxième, la troisième et la sixième de nos égalités, nous trouvons la relation

$$\psi_1 = (\varphi_0 - 2)\varphi_1.$$

En combinant entre elles la deuxième, la cinquième et la sixième, nous trouvons

$$(\psi_0 + \psi_1)(\psi_0 - \psi_1) = (\varphi_0 - 2)^2.$$

Enfin, en combinant la deuxième, la troisième, la cinquième et la

sixième, nous trouvons la proportion

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} = \frac{\psi_1}{\varphi_1},$$

qui nous semble très remarquable.

35. Ces différentes relations ont été obtenues, toutes les cinq, par la considération simultanée d'une, au moins, de nos trois premières égalités (**31**) et d'une, au moins, des trois dernières. Ce ne sont pas les seules relations qu'on puisse obtenir ainsi; mais ce sont les plus simples. On peut remarquer que, si l'on considère chacun des binomes qu'elles renferment comme la somme d'une série, ces cinq relations ne sont autres choses que des *relations d'identité entre différentes séries*.

36. En considérant la quatrième de nos six égalités (**36**); y remplaçant Ψ par la somme des fonctions ψ_0, ψ_1, et dédoublant l'égalité ainsi obtenue, nous trouvons les deux relations

$$\psi_0 - 1 + 2\cos x = \psi_1 \sin x,$$
$$\psi_1 = \psi_0 \sin x.$$

En considérant isolément la cinquième de ces mêmes égalités (**31**), nous obtenons, par une transformation immédiate, la relation

$$(1 + \cos 2x)\psi_0 = 2 - 4\cos x.$$

En considérant de même la dernière, nous trouvons

$$(1 + \cos 2x)\psi_1 = 2\sin x - 2\sin 2x.$$

37. Les quatre relations que nous venons d'écrire ne renferment chacune que des fonctions génératrices des nombres B. Ce ne sont pas non plus les seules que l'on puisse déduire de la considération des trois dernières de nos égalités (**31**); mais ce sont les plus simples. Chaque membre de chacune d'elles peut être regardé comme la somme d'une

série, ou comme le produit de deux pareilles sommes : ces quatre relations ne sont donc encore autres choses que des *relations d'identité entre différentes séries*.

II. — Relations entre les nombres B et les nombres A.

38. La relation la plus simple possible entre les nombres B et les nombres A est évidemment la relation

$$B_n = A_{n+1} - 2A_n,$$

que nous avons donnée précédemment (**14**), et qui sert de fondement à tout le présent Mémoire.

En partant des égalités ou relations que nous avons données aussi (**34**) entre les fonctions génératrices des nombres B et celles des nombres A, nous pouvons obtenir des relations nouvelles, encore assez simples, entre les nombres B et les nombres A.

39. Considérons d'abord l'égalité

$$2\Psi + 3 = (\Phi - 2)^2,$$

que nous avons établie plus haut (**34**). Elle exprime que la série

$$1 + 2B_1 \frac{x}{1!} + 2B_2 \frac{x^2}{2!} + 2B_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

est juste égale au carré de la série

$$-1 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, et écrivant que, dans les deux membres de l'égalité résultante, les coefficients de x^n sont égaux, nous obtenons la relation

$$2\frac{B_n + A_n}{n!} = \frac{A_1}{1!}\frac{A_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{A_2}{2!}\frac{A_{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}\frac{A_1}{1!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_n = -A_n + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n-1} K_n^t A_t A_{n-t},$$

si l'on convient de désigner par K_p^q le nombre des combinaisons simples de p objets q à q.

Cette relation nous donne le nombre B_n en fonction des nombres A dont l'indice ne dépasse pas n. Elle subsiste pour toutes les valeurs de n, si l'on convient d'y annuler le $\sum$ lorsque n est égal soit à 0, soit à 1.

40. Considérons maintenant l'égalité

$$\psi_0 + 1 \doteq (\varphi_0 - 1)^2.$$

Elle exprime que la série

$$B_4 \frac{x^4}{4!} + B_6 \frac{x^6}{6!} + B_8 \frac{x^8}{8!} + \ldots$$

est juste égale au carré de la série

$$A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + A_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, et écrivant que le coefficient de x^n est le même dans les deux membres de l'égalité ainsi obtenue, nous trouvons la relation

$$\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} = \frac{A_2}{2!}\frac{A_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \frac{A_4}{4!}\frac{A_{2\nu-4}}{(2\nu-4)!} + \ldots + \frac{A_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!}\frac{A_2}{2!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_{2\nu} = -A_{2\nu} + \sum_{t=1}^{\nu} K_{2\nu}^{2t} A_{2t} A_{2\nu-2t},$$

si l'on convient de donner au symbole K_p^q la signification indiquée plus haut (**39**).

Cette relation nous donne, on le voit, le nombre $B_{2\nu}$ en fonction des nombres A dont l'indice est pair et non supérieur à 2ν. Elle subsiste pour toutes les valeurs de ν, si l'on convient encore d'annuler le $\sum$ lorsque ν est égal à zéro.

41. Considérons l'égalité

$$\psi_1 = (\varphi_0 - 2)\varphi_1,$$

que nous avons établie plus haut (**34**). Elle exprime que la série

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

est juste égale au produit des deux séries

$$A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} + A_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$A_1 \frac{x}{1!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + A_5 \frac{x^5}{5!} + \ldots.$$

Portant ces séries à la place de leurs sommes dans l'égalité considérée, puis écrivant toujours que les coefficients de x^n dans les deux membres sont des nombres égaux, nous obtenons la relation

$$\frac{B_{2\nu+1} + A_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \frac{A_2}{2!}\frac{A_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \frac{A_4}{4!}\frac{A_{2\nu-3}}{(2\nu-3)!} + \ldots + \frac{A_{2\nu}}{(2\nu)!}\frac{A_1}{1!},$$

qui peut s'écrire aussi, avec nos notations habituelles,

$$B_{2\nu+1} = -A_{2\nu+1} + \sum_{1}^{\nu}{}_{t} K_{2\nu+1}^{2t} A_{2t} A_{2\nu+1-2t}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction des nombres A dont l'indice, pair ou impair, ne dépasse pas $2\nu + 1$. Elle subsiste, d'ailleurs, pour toutes les valeurs de ν, si l'on convient encore d'annuler le $\sum$ dans le cas où ν est égal à zéro.

42. Reprenons les deux relations

$$B_{2\nu} = -A_{2\nu} + \sum_{1}^{\nu}{}_t K_{2\nu}^{2t} A_{2t} A_{2\nu-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = -A_{2\nu+1} + \sum_{1}^{\nu}{}_t K_{2\nu+1}^{2t} A_{2t} A_{2\nu+1-2t},$$

que nous venons d'obtenir (**40** et **41**). Elles peuvent se réduire à une seule, qui est la relation

$$B_n = -A_n + \sum_{1}^{\nu}{}_t K_n^{2t} A_{2t} A_{n-2t};$$

dans laquelle ν désigne la partie entière de la moitié de n.

Il est à remarquer que cette relation unique ressemble beaucoup à la relation

$$B_n = -A_n + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n-1}{}_t K_n^t A_t A_{n-t},$$

que nous avons obtenue précédemment (**39**); mais que, dans les calculs, elle serait bien plus avantageuse, le $\sum$ qui y figure y présentant beaucoup moins de termes.

43. Quoi qu'il en soit, la relation que nous avons rappelée (**38**), et celles que nous avons établies ensuite, nous donnent chacune l'un des nombres B en fonction de deux ou plusieurs des nombres A. Nous ferons observer que la première de ces relations est linéaire par rapport aux nombres A; mais que toutes les suivantes sont du second degré par rapport à ces mêmes nombres.

Quant aux relations qu'on pourrait déduire des deux égalités

$$(\psi_0 + \psi_1)(\psi_0 - \psi_1) = (\varphi_0 - 2)^2,$$

$$\frac{\psi_0}{\varphi_0} = \frac{\psi_1}{\varphi_1},$$

elles seraient du second degré et par rapport aux nombres A et par

rapport aux nombres B; elles présenteraient, par conséquent, une complication assez grande : nous ne les écrirons pas.

III. — Relations entre les nombres B.

44. Les relations que nous venons d'établir contiennent chacune un nombre B et plusieurs nombres A. Pour en obtenir qui ne contiennent que des nombres B, nous partirons des quatre égalités ou relations entre différentes séries que nous avons données précédemment (**36**) et où ne figurent point les fonctions génératrices des nombres A.

45. La première de ces égalités (**36**) est

$$\psi_0 - 1 + 2\cos x = \psi_1 \sin x.$$

Elle exprime que la série

$$(B_2 - 2)\frac{x^2}{2!} + (B_4 + 2)\frac{x^4}{4!} + (B_6 - 2)\frac{x^6}{6!} + (B_8 + 2)\frac{x^8}{8!} + \ldots$$

est le produit des deux séries

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + B_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes, dans cette première égalité, et écrivant que, dans les deux membres de l'égalité nouvelle, les coefficients de x^n sont égaux, on trouve la relation

$$\frac{B_{2\nu} + (-1)^\nu . 2}{(2\nu)!} = \frac{B_{2\nu-1}}{1!(2\nu-1)!} - \frac{B_{2\nu-3}}{3!(2\nu-3)!} + \frac{B_{2\nu-5}}{5!(2\nu-5)!} - \ldots (-1)^{\nu-1} \frac{B_1}{(2\nu-1)!\,1!},$$

qui peut s'écrire aussi

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t K_{2\nu}^{2t+1} B_{2\nu-1-2t},$$

si l'on convient de donner au symbole K_p^q sa signification habituelle.

Cette relation, on le voit, nous donne le nombre $B_{2\nu}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est impair et inférieur à 2ν. Elle est vraie pour toutes les valeurs de ν supérieures à zéro.

46. La deuxième des quatre égalités que nous considérons (**36**) est

$$\psi_1 = \psi_0 \sin x.$$

Elle exprime que la série

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + B_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

est le produit des deux séries

$$B_0 + B_2 \frac{x^2}{2!} + B_4 \frac{x^4}{4!} + B_6 \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans cette deuxième égalité, puis opérant comme nous l'avons fait précédemment, nous trouvons la relation

$$\frac{B_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \frac{B_\nu}{1!\,(2\nu)!} - \frac{B_{2\nu-2}}{3!\,(2\nu-2)!} + \frac{B_{2\nu-4}}{5!\,(2\nu-4)!} - \ldots (-1)^\nu \frac{B_0}{(2\nu+1)!\,0!},$$

qui peut s'écrire aussi, à l'aide de nos notations habituelles,

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu-1} + \sum_0^{\nu-1}{}_i (-1)^i K_{2\nu+1}^{2i+1} B_{2\nu-2i}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est pair et inférieur à $2\nu+1$. Elle subsiste même dans le cas où ν est égal à zéro.

47. La troisième de nos quatre égalités (**36**) est l'égalité

$$(1 + \cos 2x)\psi_0 = 2 - 4\cos x.$$

Elle exprime que la série

$$2 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots$$

multipliée par la série

$$B_0 + B_2\frac{x^2}{2!} + B_4\frac{x^4}{4!} + B_6\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

donne comme produit la série

$$-2 + 4\frac{x^2}{2!} - 4\frac{x^4}{4!} + 4\frac{x^6}{6!} - \ldots$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes dans notre troisième égalité, puis identifiant comme précédemment, nous trouvons la relation

$$2\frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!} - \frac{2^2}{2!}\frac{B_{2\nu-2}}{(2\nu-2)!} + \frac{2^4}{4!}\frac{B_{2\nu-4}}{(2\nu-4)!} + \ldots(-1)^\nu\frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!}\frac{B_0}{0!}$$
$$= (-1)^{\nu-1}\frac{4}{(2\nu)!},$$

qui peut aussi s'écrire

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_0^{\nu-1}{}_\ell(-1)^\ell 2^{2\ell+1}K_{2\nu}^{2\ell+2}B_{2\nu-2-2\ell}.$$

Cette relation nous donne $B_{2\nu}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est pair et inférieur à 2ν. Elle suppose essentiellement que ν soit égal ou supérieur à l'unité.

48. Prenons enfin la dernière de nos quatre égalités (**36**), c'est-à-dire l'égalité

$$(1 + \cos 2x)\psi_1 = 2\sin x - 2\sin 2x.$$

Elle exprime que la série

$$2 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \ldots,$$

multipliée par la série

$$B_1 \frac{x}{1!} + B_3 \frac{x^3}{3!} + B_5 \frac{x^5}{5!} + B_7 \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

donne comme produit le double de la série

$$\frac{1-2}{1!} x - \frac{1-2^3}{3!} x^3 + \frac{1-2^5}{5!} x^5 - \frac{1-2^7}{7!} x^7 + \ldots.$$

En portant ces séries à la place de leurs sommes, puis identifiant comme d'habitude, nous trouvons la relation

$$2 \frac{B_{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} - \frac{2^2}{2!} \frac{B_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \frac{2^4}{4!} \frac{B_{2\nu-3}}{(2\nu-3)!} - \ldots (-1)^\nu \frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{B_1}{1!}$$
$$= (-1)^\nu . 2 \frac{1-2^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!},$$

qui peut aussi s'écrire

$$B_{2\nu+1} = (-1)^\nu (1 - 2^{2\nu+1}) + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_{2\nu+1}^{2t+2} B_{2\nu-1-2t}.$$

Cette relation nous donne le nombre $B_{2\nu+1}$ en fonction de tous les nombres B dont l'indice est impair et inférieur à $2\nu+1$. Elle suppose ν au moins égal à l'unité.

49. Les quatre relations que nous venons d'obtenir entre les nombres B se rapportent toutes évidemment aux deux suites

$$B_0 \quad B_2 \quad B_4 \quad B_6 \quad \ldots,$$
$$B_1 \quad B_3 \quad B_5 \quad B_7 \quad \ldots,$$

formées, la première, par les nombres B d'indices pairs; la seconde, par les nombres B d'indices impairs. Ces mêmes relations présentent cette particularité remarquable d'être toutes les quatre linéaires par

rapport aux nombres B. Elles forment, d'ailleurs, deux *couples* essentiellement différents, sur chacun desquels il convient de dire quelques mots.

50. Le premier *couple* est formé des deux premières (**45** et **46**) de nos relations, c'est-à-dire des deux relations

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_{0}^{\nu-1}{}_{t} (-1)^{t} K_{2\nu}^{2t+1} B_{2\nu-1-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu-1} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_{t} (-1)^{t} K_{2\nu+1}^{2t+1} B_{2\nu-2t}.$$

Ces deux relations résolvent deux problèmes en quelque sorte corrélatifs. Si nous nous reportons, en effet, aux deux suites considérées plus haut (**49**), chacune de ces relations nous donne un nombre quelconque d'une de ces suites en fonction de tous les nombres de l'autre qui présentent des indices moindres.

Ces deux relations, de plus, peuvent se ramener à une seule. Cette relation unique, qui les contient toutes deux, est la relation

$$B_n = (-1)^{\nu-1}.2^{2\nu+1-n} + \sum_{0}^{\nu-1}{}_{t} (-1)^{t} K_{n}^{2t+1} B_{n-1-2t},$$

dans laquelle ν désigne la partie entière de la moitié de n.

51. Le second *couple* est formé des deux dernières (**47** et **48**) de nos relations, c'est-à-dire des relations

$$B_{2\nu} = (-1)^{\nu-1}.2 + \sum_{0}^{\nu-1}{}_{t} (-1)^{t} 2^{2t+1} K_{2\nu}^{2t+2} B_{2\nu-2-2t},$$

$$B_{2\nu+1} = (-1)^{\nu}(1-2^{2\nu+1}) + \sum_{0}^{\nu-1}{}_{t} (-1)^{t} 2^{2t+1} K_{2\nu+1}^{2t+2} B_{2\nu-1-2t}.$$

Ces deux relations résolvent aussi deux problèmes corrélatifs. Si nous nous reportons, en effet, aux deux suites considérées plus

haut (**49**), chacune de ces relations nous donne un nombre quelconque d'une de ces suites en fonction de tous les nombres de cette même suite qui le précèdent. Grâce à ces dernières relations, chacune de ces suites se trouve déterminée à la façon des séries récurrentes.

Ces deux relations, de plus, peuvent se ramener à une seule. Cette relation unique, qui les contient toutes deux, est la relation

$$B_n = (-1)^{n-\nu-1}(2^{2\nu+1-n} - 2^n B_{n-2\nu+2}) + \sum_{0}^{\nu-1}{}_t (-1)^t 2^{2t+1} K_n^{2t+2} B_{n-2-2t}.$$

dans laquelle ν désigne, comme précédemment, la partie entière de la moitié de n.

CHAPITRE IV.

PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES.

I. — Propriétés asymptotiques des nombres A.

52. Des deux égalités

$$\varphi_0(x) = \sec x, \qquad \varphi_1(x) = \operatorname{tang} x,$$

et des propriétés connues de $\sec x$ et de $\operatorname{tang} x$, résultent les deux identités

$$\frac{1}{1^{2\nu+1}} - \frac{1}{3^{2\nu+1}} + \frac{1}{5^{2\nu+1}} - \ldots = \frac{A_{2\nu}}{(2\nu)!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu+1},$$

$$\frac{1}{1^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}} + \frac{1}{5^{2\nu}} + \ldots = \frac{A_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu},$$

que nous avons utilisées autrefois [1], et où la lettre π désigne, comme d'habitude, le rapport de la circonférence au diamètre.

---

[1] Dans notre Note intitulée *Probabilité pour qu'une permutation ....*

53. Dans ces deux identités, chacun des seconds membres est de la forme

$$\frac{A_n}{n!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1};$$

chacun des premiers membres tend vers l'unité lorsque ν, et par conséquent n, croît indéfiniment.

On a donc, identiquement,

$$\lim\left[\frac{A_n}{n!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right]=1,$$

lorsque n croît indéfiniment.

54. Considérons cette dernière égalité. Si nous posons

$$\lambda_n = n!\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1},$$

elle peut s'écrire

$$\lim\frac{A_n}{\lambda_n}=1.$$

Or, lorsque n croît indéfiniment, A_n est un infiniment grand. Donc λ_n en est un autre; et le rapport de λ_n à A_n tend vers la limite 1.

Nous exprimerons ce fait, sous forme de théorème, de cette nouvelle manière :

Lorsque n croît indéfiniment, le nombre λ_n, défini par l'égalité

$$\lambda_n = n!\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1},$$

est une valeur asymptotique de A_n.

55. Cet énoncé nous montre bien dans quel sens nous prenons la locution *valeur asymptotique*. Il est clair, puisque le nombre A_n est la moitié du nombre $P_{n,n-1}$, que nous pouvons dire, en conservant le sens de cette locution :

Le nombre $2\lambda_n$ est une valeur asymptotique du nombre des permutations alternées de n éléments.

56. Écrivons les trois égalités

$$\lim\left[\frac{A_n}{n!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right]=1,$$

$$\lim\left[\frac{(n+1)!}{A_{n+1}}\,2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}\right]=1,$$

$$\lim\frac{n}{n+1}=1,$$

dont la deuxième se déduit facilement de la première et dont la troisième est évidente; puis multiplions-les membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons

$$\lim\left[\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right]=1.$$

Or, dans cette égalité nouvelle, la quantité entre crochets n'est autre chose que le quotient de la première par la seconde des deux expressions

$$\frac{A_n}{A_{n+1}},\quad \frac{\pi}{2n}.$$

Ces deux expressions, lorsque n croît indéfiniment, sont deux infiniment petits. Leur rapport tend vers l'unité. Il est naturel de prendre $\frac{1}{n}$ pour l'infiniment petit principal. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de A_n à A_{n+1} est un infiniment petit, qui a pour valeur principale le rapport de π à $2n$.

Il est, d'ailleurs, évident que l'on peut, dans cet énoncé, remplacer le rapport de A_n à A_{n+1} par celui de $P_{n,n-1}$ à $P_{n+1,n}$.

57. L'égalité

$$\lim\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right)=1,$$

dont nous venons de faire usage, nous donne immédiatement ce nouveau théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression α_n, définie par

l'égalité

$$\alpha_n = 2n \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

tend vers la limite π.

D'ailleurs il est encore évident qu'on peut remplacer, dans cette expression de α_n, les nombres A_n, A_{n+1} par les nombres $P_{n,n-1}$, $P_{n+1,n}$.

II. — Propriétés asymptotiques des nombres B.

58. Comme le présent Mémoire a pour objet l'étude des permutations quasi-alternées et, par conséquent, celle des nombres B, le paragraphe précédent, où il n'est question que des nombres A, pourra sembler une simple digression. En réalité, ce paragraphe nous était nécessaire, car c'est des propriétés asymptotiques des nombres A que nous allons déduire celles des nombres B.

59. Pour y arriver, considérons (**14**) la formule

$$A_{n+1} = 2A_n + B_n,$$

qui est le fondement de nos recherches sur les permutations quasi-alternées. Nous en tirons facilement l'égalité

$$n\left(1 - \frac{B_n}{A_{n+1}}\right) = 2n \frac{A_n}{A_{n+1}}.$$

D'après ce que nous avons vu plus haut (**57**), lorsque n croît indéfiniment, le second membre de cette égalité tend vers π, c'est-à-dire vers une limite finie. Le premier membre tend vers cette même limite. Or, son premier facteur, n, est un infiniment grand. Donc son second facteur, c'est-à-dire la quantité entre parenthèses, est un infiniment petit. Donc finalement

$$\lim \frac{B_n}{A_{n+1}} = 1.$$

Il suit de là que le rapport de l'infiniment grand A_{n+1} à l'infiniment grand B_n a pour limite l'unité. Donc

Lorsque n croît indéfiniment, A_{n+1} est une valeur asymptotique de B_n.

60. Si nous nous rappelons que A_{n+1} est (**10**) la moitié de $P_{n+1,n}$, et que B_n est (**10**) la moitié de $P_{n,n-2}$, nous voyons immédiatement que ce théorème peut s'énoncer sous cette nouvelle forme :

Lorsque n croît indéfiniment, le nombre des permutations alternées de $n+1$ éléments est une valeur asymptotique du nombre des permutations quasi-alternées de n éléments.

Ce nouvel énoncé montre, bien mieux, selon nous, que le précédent, l'importance de ce remarquable théorème.

61. Nous pouvons donner aussi, en fonction de n, une valeur asymptotique de B_n. D'après ce qui précède (**54**), en effet, λ_{n+1} est une valeur asymptotique de A_{n+1}. Donc :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression λ_{n+1}, définie par l'égalité

$$\lambda_{n+1} = (n+1)!\, 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2},$$

est une valeur asymptotique du nombre B_n.

Il en résulte, d'ailleurs, cette conséquence immédiate :

Le nombre $2\lambda_{n+1}$ est une valeur asymptotique du nombre $P_{n,n-2}$.

62. Écrivons les quatre égalités

$$\lim\left(\frac{A_{n+1}}{A_{n+2}}\,\frac{2n+2}{\pi}\right) = 1,$$

$$\lim\frac{B_n}{A_{n+1}} = 1,$$

$$\lim\frac{A_{n+2}}{B_{n+1}} = 1,$$

$$\lim\frac{n}{n+1} = 1,$$

dont les trois premières résultent de ce qui précède (**56** et **59**), et dont la quatrième est évidente; puis multiplions-les membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons l'équation nouvelle

$$\lim\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1,$$

qui nous donne immédiatement cette proposition :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de B_n à B_{n+1} est un infiniment petit qui a pour valeur principale le rapport de π à $2n$.

Il est, d'ailleurs, évident qu'on peut, dans cet énoncé, remplacer B_n et B_{n+1} respectivement par $P_{n,n-2}$ et $P_{n+1,n-1}$.

63. Cette même égalité

$$\lim\left(\frac{B_n}{B_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1$$

nous donne encore ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression β_n, définie par l'égalité

$$\beta_n = 2n\,\frac{B_n}{B_{n+1}}$$

tend vers la limite π.

D'ailleurs, il est encore évident qu'on peut, dans l'expression de β_n remplacer B_n et B_{n+1} respectivement par $P_{n,n-2}$ et $P_{n+1,n-1}$.

64. Prenons enfin, simultanément, les deux égalités

$$\lim\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1,$$

$$\lim\frac{A_{n+1}}{B_n} = 1;$$

et multiplions-les membres à membres. Nous trouvons la relation

$$\lim\left(\frac{A_n}{B_n}\,\frac{2n}{\pi}\right) = 1;$$

d'où nous déduisons ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de A_n à B_n est un infiniment petit qui a pour valeur principale le rapport de π à $2n$.

63. Ce théorème entraîne immédiatement celui-ci :

Lorsque n croît indéfiniment, l'expression γ_n, définie par l'égalité

$$\gamma_n = 2n \frac{A_n}{B_n},$$

tend vers la limite π.

66. On peut remarquer, d'ailleurs, touchant ces deux derniers théorèmes :

D'abord que, dans l'énoncé de chacun d'eux, on peut remplacer A_n et B_n respectivement par $P_{n,n-1}$ et $P_{n,n-2}$;

Ensuite que, parmi tous les théorèmes que nous venons d'établir, ces deux derniers sont les seuls où les nombres A et B qui y figurent soient, dans le triangle des séquences, placés sur une même ligne.

67. Rapprochons enfin les différents résultats que nous avons obtenus, tant dans le présent paragraphe que dans le précédent. Nous arrivons à ces deux théorèmes, dont le second n'est qu'une conséquence du premier, et qui nous semblent fort remarquables :

1° *Lorsque n croît indéfiniment, les trois rapports*

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad \frac{B_n}{B_{n+1}}, \quad \frac{A_n}{B_n}$$

sont trois infiniment petits ayant la même valeur principale, et cette valeur principale n'est autre chose que le rapport de π à $2n$;

2° *Lorsque n croît indéfiniment, les trois expressions*

$$2n \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad 2n \frac{B_n}{B_{n+1}}, \quad 2n \frac{A_n}{B_n}$$

tendent toutes les trois vers la même limite; et cette limite n'est autre chose que le nombre π.

CHAPITRE V.

QUESTION DE PROBABILITÉS.

I. — Détermination de la probabilité z_n.

68. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 5 novembre 1883, nous avons supposé qu'on prenait une permutation au hasard, parmi les permutations des n premiers nombres, puis nous avons fait connaître : en premier lieu, la probabilité pour que cette permutation fût une permutation alternée; en second lieu, une valeur asymptotique de cette probabilité lorsque n croît indéfiniment.

Nous nous proposons maintenant de chercher la probabilité pour que cette même permutation soit une permutation quasi-alternée, et de déterminer une valeur asymptotique de cette nouvelle probabilité, dans le cas encore où n croît indéfiniment.

69. Considérons le système complet des permutations des n premiers nombres. Le nombre total de ces permutations est $n!$ Le nombre de celles qui sont quasi-alternées est $P_{n,n-2}$. Si donc nous désignons par z_n la probabilité pour qu'une permutation de n éléments soit une permutation quasi-alternée, nous avons, d'après la définition même de la probabilité,

$$z_n = \frac{P_{n,n-2}}{n!}.$$

Or, comme nous le savons (**10**),

$$P_{n,n-2} = 2B_n.$$

Donc

$$z_n = \frac{2B_n}{n!}.$$

Nous sommes, par conséquent, ramenés à la considération des nombres B.

70. Nous avons montré, dans le cours du présent travail (**19**), que, pour toute valeur de n, le nombre B_n était le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement, suivant les puissances croissantes de x, du quotient

$$\frac{1 - 2\cos x}{1 - \sin x}.$$

Il s'ensuit immédiatement ce théorème :

La probabilité pour qu'une permutation des n premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de x^n dans le développement du quotient précédent suivant les puissances croissantes de x.

71. Cette valeur de la probabilité z_n est tout à fait générale. Si l'on distingue deux cas, selon que n est pair ou impair, on déduit des fonctions génératrices de $B_{2\nu}$ et de $B_{2\nu+1}$ ces deux nouveaux théorèmes, qui ne sont que des corollaires du précédent :

1° *La probabilité pour qu'une permutation des 2ν premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de $x^{2\nu}$ dans le développement du produit*

$$(\sec x - 2)\sec x,$$

suivant les puissances croissantes de x;

2° *La probabilité pour qu'une permutation des $2\nu + 1$ premiers nombres soit une permutation quasi-alternée est juste le double du coefficient de $x^{2\nu+1}$ dans le développement du produit*

$$(\sec x - 2)\tang x,$$

suivant les puissances croissantes de x.

72. Nous connaissons ainsi la probabilité cherchée z_n. Il serait évidemment facile de la mettre sous la forme soit d'une dérivée, soit d'une intégrale définie. Nous nous dispenserons de ces calculs, qui n'ajouteraient rien à nos résultats.

II. — Valeur asymptotique de z_n.

73. Pour obtenir une valeur asymptotique de z_n, lorsque n croît indéfiniment, nous écrivons les trois égalités

$$\lim \left[\frac{A_{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1,$$

$$\lim \frac{B_n}{A_{n+1}} = 1,$$

$$\lim \frac{n+1}{n} = 1,$$

dont les deux premières résultent de ce qui précède (**35** et **39**), et dont la troisième est évidente; puis nous les multiplions membres à membres. Toutes réductions faites, nous trouvons l'égalité nouvelle

$$\lim \left[\frac{B_n}{n!}\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1.$$

74. D'après ce que nous avons vu plus haut (**69**),

$$B_n = \frac{1}{2} n!\, z_n.$$

Portant cette valeur de B_n dans la dernière des égalités précédentes (**73**), nous arrivons à l'égalité finale

$$\lim \left[z_n \frac{1}{4n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+2}\right] = 1.$$

Or, dans cette nouvelle relation, la quantité entre crochets n'est autre chose que le rapport de z_n à $4n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}$. Ce rapport ayant pour limite l'unité, nous pouvons énoncer ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, la probabilité pour qu'une permutation des n premiers nombres soit une permutation quasi-alternée

est un infiniment petit dont le rapport au produit infiniment petit

$$4n\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+2}$$

a pour limite l'unité.

75. Étendant aux infiniment petits une locution que nous n'avons employée jusqu'ici que pour les infiniment grands, nous pouvons dire aussi que ce produit est une *valeur asymptotique* de la probabilité z_n.

Il est à remarquer que cette valeur asymptotique est relativement simple. Il est à remarquer aussi qu'elle est toujours incommensurable, bien que, par sa nature même, la probabilité z_n soit, au contraire, toujours commensurable.

Solution de l'équation $X^4 + 35Y^4 = Z^2$;

PAR LE P. PEPIN S. J.

1. Par une application convenable de la méthode de *descente* de Fermat on peut obtenir une solution complète d'un grand nombre d'équations indéterminées, renfermées dans la formule

$$ax^4 + by^4 = cz^2.$$

Comme cette équation admet un nombre indéfini de solutions toutes les fois qu'elle n'est pas impossible, on doit la considérer comme complètement résolue lorsqu'on a trouvé une méthode certaine pour obtenir toutes les solutions en nombres entiers et premiers entre eux, qui ne surpassent pas une limite assignée, et démontrer que l'on ne laisse échapper aucune solution plus simple que les solutions calculées. On y parvient le plus souvent en démontrant que toute solution de l'équation proposée, tant qu'elle est formée de nombres tous supérieurs à l'unité, peut se ramener à une solution de la même équation en nombres moindres, au moyen de laquelle on l'exprime par des formules dont le nombre varie suivant les cas. Le raisonnement destiné à démontrer que l'emploi méthodique des formules obtenues donne avec certitude toutes les solutions en nombres premiers entre eux, qui ne surpassent pas une limite assignée, ce raisonnement, dis-je, est au fond le même dans tous les cas; il a été complètement déve-

loppé dans mon étude sur l'équation

$$7x^4 - 5y^4 = 2z^2,$$

publiée en 1879 dans le *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. III. p. 105.

2. L'équation que je me propose de résoudre,

$$X^4 + 35Y^4 = Z^2, \tag{1}$$

présente une particularité remarquable. Elle est susceptible d'une solution complète, sans que les solutions formées de nombres supérieurs à l'unité soient toutes ramenées à d'autres solutions en nombres moindres, au moyen desquelles on puisse les exprimer. Cette réduction, facile tant que Y est un nombre pair, devient fort compliquée quand Y est impair. Mais, dans ce dernier cas, les solutions de l'équation (1) se ramènent à celles de l'équation citée plus haut, et elles jouent relativement aux autres solutions le rôle de solutions primitives.

Soit en effet $Y = ab$ un nombre impair. Comme nous supposons X, Y, Z premiers entre eux, la décomposition de l'équation (1) s'effectue au moyen des formules suivantes

$$\begin{aligned} Z \pm X^2 &= a^4,\ 7a^4, & Z \mp X^2 &= 35b^4,\ 5b^4, \\ 2Z &= a^4 + 35b^4, & \pm 2X^2 &= a^4 - 35b^4, \\ 2Z &= 7a^4 + 5b^4, & \pm 2X^2 &= 7a^4 - 5b^4. \end{aligned}$$

On doit rejeter la première décomposition, parce que $+2$ et -2 sont non-résidus quadratiques de 5. Dans la dernière formule, le signe inférieur est exclu par le module 7. Par conséquent les deux facteurs a, b de Y forment une solution de l'équation citée plus haut

$$7x^4 - 5y^4 = 2z^2. \tag{2}$$

Les solutions de l'équation proposée dans lesquelles Y est impair

sont donc exprimées au moyen des solutions de l'équation (2) par les formules

$$\text{I.} \qquad Z = \frac{7x^4 + 5y^4}{2}, \qquad X = z, \qquad Y = xy.$$

Comme l'équation (2) a été complètement résolue dans le Mémoire cité, nous sommes assuré d'obtenir toutes les solutions de l'équation (1) dans lesquelles X et Y sont impairs et inférieurs à une limite assignée.

3. Quand Y est pair, la décomposition de l'équation proposée s'effectue par les formules suivantes

$$Y = 2ab, \qquad Z \pm X^2 = 2a^4,\ 10a^4,\ 14a^4,\ 70a^4,$$
$$Z \mp X^2 = 280b^4,\ 56b^4,\ 40b^4,\ 8b^4,$$

d'où l'on déduit respectivement

$$\pm X^2 = a^4 - 140b^4, \quad 5a^4 - 28b^4, \quad 7a^4 - 20b^4, \quad 35a^4 - 4b^4.$$

La première équation exige, suivant le module 8, que l'on prenne le signe supérieur et que b soit pair. La deuxième et la troisième sont impossibles, parce que $+7$ et -7 sont non-résidus quadratiques de 5. La quatrième n'est possible qu'avec le signe inférieur, et elle exige que b soit impair. On a par conséquent l'un des deux systèmes suivants

$$(3) \quad Y = 4ab, \qquad X^2 = a^4 - 16.140b^4, \qquad Z = a^4 + 16.140b^4,$$
$$(4) \quad Y = 2ab, \qquad -X^2 = 35a^4 - 4b^4, \qquad Z = 35a^4 + 4b^4.$$

La deuxième équation du premier système se décompose de la manière suivante

$$a^2 \pm X = 2m^4,\ 10m^4,\ 14m^4,\ 70m^4, \qquad b = mn.$$
$$a^2 \mp X = 32.35n^4,\ 32.7n^4,\ 32.5n^4,\ 32n^4.$$
$$a^2 = m^4 + 35(2n)^4,\ 5m^4 + 7(2n)^4,\ 7m^4 + 5(2n)^4,\ 35m^4 + (2n)^4.$$

La deuxième et la troisième équation sont impossibles parce que 7 est non-résidu quadratique de 5; la dernière est impossible suivant le module 4.

La première décomposition est seule admissible; on a

$$\text{II.} \qquad a^2 = m^4 + 35(2n)^4, \qquad Y = 4amn,$$
$$\pm X = m^4 - 33(2n)^4, \qquad Z = a^4 + 140(2mn)^4.$$

Ainsi toute solution de l'équation (1) dans laquelle Y est un multiple de 4 se ramène à une autre solution de la même équation en nombres moindres $(m, 2n, a)$ au moyen de laquelle on l'exprime par les formules II. Quant aux solutions dans lesquelles Y est de la forme $4l + 2$, elles sont exprimées par les formules (4) dont la deuxième se décompose de la manière suivante

$$a = mn, \qquad 2b^2 \pm X = m^4,\ 7m^4, \qquad 2b^2 \mp X = 35n^4,\ 5n^4,$$
$$4b^2 = m^4 + 35n^4, \qquad 4b^2 = 7m^4 + 5n^4.$$

La dernière équation étant impossible, parce que 7 est non-résidu quadratique de 5, la première décomposition est seule admissible; la solution considérée se ramène à une solution plus simple $(m, n, 2b)$ de la même équation, au moyen de laquelle on l'exprime par les formules suivantes

$$\text{III.} \qquad m^4 + 35n^4 = (2b)^2, \qquad Y = 2bmn,$$
$$\pm X = \frac{m^4 - 35n^4}{2}, \qquad Z = 4b^4 + 35m^4n^4.$$

4. Les formules II et III peuvent être remplacées par un système unique

$$\text{IV.} \qquad x^4 + 35y^4 = z^2, \qquad \theta Y = 2xyz,$$
$$\theta X = x^4 - 35y^4, \qquad \theta^2 Z = z^4 + 4.35(xy)^4,$$

où θ est égal à 1 ou 2, suivant que y est pair ou impair.

Toute solution de l'équation proposée, lorsque la seconde indéter-

minée est un nombre impair, sert de base à une suite indéfinie de solutions dans lesquelles la valeur de Y est divisible par les puissances successives de 2. On les obtient par l'emploi répété des formules IV.

D'ailleurs les solutions dans lesquelles X et Y sont impairs sont exprimées par les formules I au moyen des solutions de l'équation (2) dont nous avons donné une solution complète dans le Mémoire cité de 1879. Nous pouvons donc obtenir toutes celles de ces solutions qui sont formées de nombres inférieurs à une limite donnée. Comme nous savons que le nombre des solutions de l'équation proposée est infini, nous pouvons la considérer comme complètement résolue.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer toutes celles des solutions de l'équation (1) dans lesquelles Y ne surpasse pas 15 millions. Nous déterminerons d'abord celles de ces solutions où la valeur de Y est impaire. Elles sont exprimées par les formules I au moyen des solutions de l'équation (2). Il suffit de déterminer celles des solutions de cette dernière équation dans lesquelles le produit xy des deux premières indéterminées ne surpasse pas la limite assignée. Or nous avons trouvé dans le Mémoire cité que les solutions les plus simples de l'équation (2) sont

$$(1, 1, 2), \quad (23, 11, 971), \quad (10127, 1525, z).$$

Comme le produit

$$10127 . 1525 = 15443675$$

surpasse la limite assignée, il suffit d'employer les deux premières solutions.

On en déduit par les formules I les deux solutions

$$X = 1, \qquad Y = 1, \qquad Z = 6;$$
$$X = 971, \qquad Y = 253, \qquad Z = 1016046.$$

Ces deux solutions sont, dans les limites assignées, les seules dans lesquelles la deuxième indéterminée soit un nombre impair. On déduit de chacune d'elles une solution par les formules III, puis une suite indéfinie d'autres solutions en nombres croissants, par l'emploi répété des formules II.

En faisant $m = n = 1$, $2b = 6$ dans les formules III, on en déduit

$$X = 17, \qquad Y = 6, \qquad Z = 359.$$

Cette solution donne par les formules II, en y faisant $m = 17$, $2n = 6$, $a = 359$,

$$X = 38161, \qquad Y = 73236, \qquad Z = 3176436240 1.$$

La solution suivante dépasserait de beaucoup la limite assignée. Il en est de même de celle qu'on déduirait de la solution (971, 233, 1016046) au moyen des formules III. Par conséquent l'équation proposée n'admet que quatre solutions en nombres entiers et premiers entre eux, dans lesquelles la valeur de Y ne surpasse pas 15 millions, savoir

$$(1, 1, 6), \quad (17, 6, 359), \quad (971, 253, 1016046),$$
$$(38161, 73236, 3176436240 1).$$

5. Si l'on ne se bornait pas aux solutions en nombres premiers entre eux, le nombre des solutions comprises dans les limites assignées surpasserait 17 millions. Le nombre de celles de ces solutions dans lesquelles X, Y sont inégaux et où le plus grand commun diviseur des trois nombres ne renferme aucun des facteurs 2, 3, 5, 11 trop faciles à reconnaître, ce nombre, dis-je, est égal à 620482. On pourra citer, par exemple, les solutions suivantes

$$(119, 42, 2515), \quad (221, 78, 1077), \quad (323, 114, 129599)$$

et un grand nombre d'autres. Mais qu'on débarrasse ces solutions de tout facteur commun, on verra qu'elles se ramènent à celles que nous venons d'indiquer.

6. On voit assez bien par l'analyse précédente qu'on est assuré d'obtenir par la méthode indiquée toutes les solutions de l'équation proposée en nombres premiers entre eux, dont le second Y ne surpasse pas une limite assignée L. Néanmoins, il n'est pas inutile d'en développer la démonstration. Pour cela nous distinguerons deux cas

suivant que la seconde indéterminée Y reçoit une valeur impaire ou une valeur paire.

1° $Y \equiv 1 \pmod{2}$. — La solution T est exprimée par les formules I au moyen d'une solution de l'équation (2); et l'on a $xy = Y$. Comme l'équation (2) est complètement résolue, nous pouvons déterminer avec certitude toutes celles des solutions de cette équation dans lesquelles le produit xy des deux premières indéterminées ne dépasse pas la limite L, et déduire de chacune d'elles la solution (X, Y, Z) de l'équation (1), qui en dépend par les formules I. Nous sommes donc assuré d'obtenir toutes celles des solutions (X, Y, Z) de l'équation (1) qui satisfont à la double condition $Y \equiv 1 \pmod{2}$, $Y \leqq L$.

2° $Y = 2^\alpha Y_1$, $Y_1 \equiv 1 \pmod{2}$. — Si l'exposant α est > 1, la solution T se ramène à une solution $(m, 2n, a)$, au moyen de laquelle elle s'exprime par les formules II. On déduit de la formule

$$Y = 4amn = 2^\alpha Y_1$$

que la plus haute puissance de 2 qui divise la valeur $2n$ de la seconde indéterminée est $2^{\alpha-1}$. Soit $T_{\alpha-1}$ cette nouvelle solution. Si l'exposant $\alpha - 1$ surpasse encore l'unité, cette solution s'exprime par les mêmes formules, au moyen d'une solution $T_{\alpha-2}$ dans laquelle l'exposant de 2 est diminué d'une unité. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une solution T_1, dans laquelle Y est de la forme $4l + 2$.

Cette solution T_1 se ramène à une solution $T_0 = (m, n, 2b)$ dans laquelle les deux premiers nombres m, n sont impairs, et au moyen de laquelle on l'exprime par les formules III.

Ainsi, à partir d'une solution quelconque T, on peut former une suite de solutions en nombres décroissants, se terminant à une solution T_0.

Soit (S) cette suite écrite dans l'ordre inverse

$$(S) \qquad T_0, \quad T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_{\alpha-2}, \quad T_{\alpha-1}, \quad T.$$

Je dis qu'en employant la méthode indiquée on obtient tous les termes de cette suite, et par conséquent la solution considérée T.

D'abord nous avons démontré (1°) que le premier terme s'obtenait

avec certitude. Nous ne le connaissons pas, il est vrai; mais, en prenant toutes les solutions comprises dans les limites déterminées par les deux conditions $Y \equiv 1 \pmod{2}$, $Y \leqq L$, et en déduisant de chacune d'elles la solution qui en dépend par les formules III, nous sommes assuré d'employer la solution T_0 et d'en déduire la solution T_1. Si nous employons toutes les solutions obtenues pour en déduire par les formules II les solutions qui en dépendent, nous sommes certain d'employer la solution T_1 et d'en déduire la solution T_2. En employant dans les formules II toutes les solutions ainsi obtenues, nous sommes assuré d'employer la solution T_2 et d'en déduire la solution T_3 qui est le quatrième terme de la suite (S), et ainsi de suite. Nous sommes donc certain d'obtenir par l'emploi répété des formules II, à partir des solutions où la deuxième indéterminée est divisible par 4, tous les termes de la suite (S), et par conséquent la solution T, qui en est le dernier terme.

La formule $Y = 4amn$ montre que chacune des solutions obtenues est du quatrième ordre, puisque a est du second ordre par rapport aux deux nombres m, n. C'est pourquoi le nombre des solutions est très petit par rapport à la limite assignée. Mais il ne faut pas oublier qu'il s'agit de solutions formées de nombres premiers entre eux; car autrement une seule solution

$$X = a, \qquad Y = b, \qquad Z = c$$

en détermine par les formules

$$X = am, \qquad Y = bm, \qquad Z = cm^2$$

un nombre égal à la partie entière du quotient $L : b$.

Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice;

PAR M. N. COCULESCO.

INTRODUCTION.

Il arrive souvent que, les moyens mouvements étant presque commensurables, certains termes de la fonction perturbatrice acquièrent, malgré leur rang élevé, une importance considérable par suite de la présence de petits diviseurs. Il peut être nécessaire de les calculer, sans connaître les termes qui précèdent; mais le plus souvent on n'a besoin que d'une valeur approchée, parce qu'il ne s'agit que de reconnaître si ces termes sont négligeables.

La question de trouver l'expression approchée de ces termes a déjà à plusieurs reprises occupé les géomètres. Cauchy s'en est occupé. Dans une série de Mémoires, insérés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1), l'illustre géomètre fit connaître de remarquables expressions approchées, qui lui permirent de retrouver les résultats du grand Mémoire de Le Verrier : *Sur la grande inégalité de Pallas* (2).

Puiseux, *Sur le développement en série des coordonnées des pla-*

(1) Voir *Comptes rendus*, t. XIX et XX.

(2) *Annales de l'Observatoire de Paris*, t. I.

nètes et de la fonction perturbatrice (¹) et Bourget, *Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice* (²), s'en occupèrent également.

Dans son beau Mémoire *Sur les perturbations de Pallas par Jupiter* (³), M. Tisserand fit entrevoir (p. 30-31) les conséquences fécondes auxquelles on serait conduit dans cet ordre d'idées, en prenant pour base le remarquable Mémoire de M. Darboux : *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres* (⁴). « La recherche de la partie principale d'un coefficient de rang élevé dans la série dépend, uniquement, des singularités que présente la fonction sur les circonférences qui limitent la convergence. »

C'est le principe fondamental de ce beau Mémoire.

C'est M. Flamme qui, le premier à notre connaissance, utilisa la remarque de M. Tisserand. En prenant pour base de ses recherches le Mémoire de M. Darboux, M. Flamme obtint de remarquables expressions approchées et donna même une extension du théorème de M. Darboux (⁵).

Mais pour pouvoir appliquer ce théorème, qui n'était applicable qu'aux fonctions d'une seule variable, tandis que la fonction perturbatrice doit être développée en fonction de deux variables (les deux anomalies moyennes), M. Flamme fit la remarque qu'il suffisait d'évaluer par approximation les coefficients des termes généraux dans le développement de la fonction

$$r^k e^{(lf+m\varepsilon+n\zeta)i}.$$

r, f, ε et ζ désignent, respectivement, le rayon vecteur, l'anomalie vraie, l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne d'une des planètes. En d'autres mots, il fallait évaluer par approximation l'expres-

---

(¹) *Journal de Liouville*, 1860.

(²) *Journal de Liouville*, 1873, et *Annales de l'Observatoire*, t. VII.

(³) *Annales de l'Observatoire*, t. XV, et *Mécanique céleste*, t. I, Chap. XXVIII.

(⁴) *Journal de Mathématiques*, 1878.

(⁵) Flamme, *Thèse inaugurale*. Gauthier-Villars, 1887.

sion de

$$r^k e^{(lf+m\varepsilon)i}.$$

Dans ces conditions la fonction sous le signe $\int$ dans l'expression suivante du coefficient de $e^{n\zeta}$,

$$P_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^k e^{(lf+m\varepsilon)i} e^{-n\zeta i}\, d\zeta,$$

pouvant s'exprimer en fonction d'une seule variable, M. Flamme applique le théorème de M. Darboux et arrive à l'expression cherchée (*voir* p. 66).

C'est dans ses remarquables recherches sur la *non-existence des intégrales uniformes,* dans les problèmes de la Dynamique [1], que M. Poincaré fut amené à s'occuper de la question des expressions approchées des termes très éloignés dans le développement de la fonction perturbatrice.

Il s'agissait de vérifier son important théorème : « qu'il n'existe pas de relation, dans le problème des trois corps, entre $2n-4$ ($n=6$, $2n-4=8$ pour le cas général) quelconques des expressions suivantes

$$(a) \qquad (C^0_{an,cn})^{n'}(C^0_{an',cn'})^{-n} \text{ »} \qquad (n, n' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

en désignant par $C^0_{an,cn}$ le terme principal, terme d'ordre $|m+m'|$, de $C_{m,m'}$, dans son développement en série procédant suivant les puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons; le terme principal de $C_{0,0}$ étant $C^1_{0,0}$.

$C_{m,m'}$ est le coefficient général du développement de la fonction perturbatrice sous la forme

$$(b) \qquad F_1 = \Sigma\, C_{m,m'}\, e^{\sqrt{-1}[m(l+g+\theta)+m'(l'+g'+\theta')]}$$

$\left(m = an,\ m' = cn,\ -\frac{c}{a}\right.$ voisin du rapport des moyens mouvements$\left.\right)$.

---

[1] Voir *les Nouvelles Méthodes de la Mécanique céleste,* t. I, Chap. V, et aussi le célèbre Mémoire du tome XIII des *Acta mathematica.*

M. Poincaré montre (p. 265) qu'il suffira de vérifier que les déterminants $\Delta_0 \neq 0$, Δ_0 étant formé avec neuf lignes quelconques, prises dans le Tableau (a) correspondant aux diverses valeurs de n.

C'est pour faire cette vérification, dans le cas surtout de coefficients appartenant à une classe *singulière*, qu'il fallait avoir des expressions approchées des coefficients. Les expressions obtenues par M. Flamme auraient suffi, si l'on n'avait été obligé de les appliquer au développement (b) de F_1.

M. Poincaré reprit alors le problème du développement approché de la fonction perturbatrice et montra [1], d'une manière ingénieuse, comment on pouvait appliquer directement à la fonction perturbatrice le théorème de M. Darboux.

L'étude de la fonction d'une seule variable $\Phi(z)$, à laquelle M. Poincaré ramène la fonction perturbatrice, et les conséquences qui en découlent sont d'une grande importance pour la théorie des perturbations.

C'est dans ce but surtout, et pour compléter quelques-unes des recherches, sommairement indiquées, de l'illustre géomètre, que nous avons entrepris le présent travail. La difficulté, cependant, du problème, difficulté qui provient d'une part de la résolution des équations (de degré très élevé en général), donnant les singularités de $\Phi(z)$, d'autre part de la discussion très délicate pour reconnaître quel est, parmi les points singuliers, celui qui convient au problème, nous a obligé à ne considérer, dans un premier travail, que quelques cas particuliers.

Après avoir repris et développé le cas plus simple où l'une des excentricités était supposée nulle et l'autre petite, nous avons considéré le cas où aucune des excentricités n'était nulle. Une discussion très délicate, que nous espérons avoir faite complètement, nous a amené à reconnaître que, sauf dans des cas limites qui n'auront pas lieu dans le système solaire, on n'aura qu'un seul point singulier sur le contour de convergence.

Ce point sera, suivant les cas, le point appelé μ ou bien le point α.

---

[1] Poincaré, *Comptes rendus*, t. CXII, et les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I. Chap. VI.

C'est donc l'affixe du point μ et de son réciproque μ', ou bien les affixes respectifs de α et de α' qui vont définir le domaine de convergence de $\Phi(z)$ et permettront d'obtenir la *partie principale* du coefficient général de $\Phi(z)$, dans son développement en série de Laurent.

Pour terminer nous citerons, dans le même ordre d'idées, les recherches de M. Hamy, inspirées également par le Mémoire de M. Poincaré. M. Hamy est arrivé à des résultats extrêmement intéressants, dont il a fait plusieurs applications (¹). Tout récemment un Mémoire, *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice,* dû à l'éminent astronome, a paru dans le *Journal de Mathématiques,* t. II, 1894.

Enfin, quoique dans un autre ordre d'idées, le Mémoire de M. Radau : *Sur les inégalités planétaires du mouvement de la Lune* (²) et le Mémoire de M. Hadamard : *Sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (³), dans lequel l'éminent auteur se propose le problème, inverse de celui de M. Darboux, de « déterminer les points critiques situés sur le contour de convergence ».

I.

1. Les équations de la Dynamique, mises sous la forme canonique, sont

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i};$$

l'indice i prendra les valeurs 1, 2, 3, ..., 6 dans le cas du *Problème des trois corps;* F est une fonction uniforme des six paires de variables conjuguées x_i, y_i.

Dans ce cas, les équations (1) admettent une intégrale *particulière* (entendue dans le sens de M. Poincaré) qui est la fonction F elle-même; c'est l'intégrale *des forces vives;* ensuite, trois autres intégrales, les *intégrales des aires.*

(¹) Hamy, *Comptes rendus,* t. CXV et CXVIII; *Bull. astr.*, t. X.

(²) *Annales de l'Observatoire de Paris,* t. XXI.

(³) *Annales de l'École Normale supérieure.* 1893.

M. Poincaré a démontré, dans ses remarquables recherches sur la *non-existence des intégrales uniformes*, qu'il n'existe pas dans le problème des trois corps, d'autre intégrale analytique et uniforme, en dehors des quatre intégrales précédentes.

La fonction F est, en faisant usage des notations de M. Poincaré, la suivante

$$(2)\qquad F = \frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{2\beta} + \frac{y_4^2 + y_5^2 + y_6^2}{2\beta'} - \frac{m_2 m_3}{\mu a} - \frac{m_3 m_1}{\mu b} - \frac{m_1 m_2}{\mu c},$$

a, b, c désignant les côtés du triangle formé par les trois corps, m_1, m_2, m_3, les masses respectives; quant aux autres quantités, elles sont définies comme il suit

$$(a)\qquad \begin{cases} \beta\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, & \beta'\mu = \dfrac{(m_1 + m_2)\, m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ y_k = \beta \dfrac{dx_k}{dt}, & y_j = \beta' \dfrac{dx_j}{dt} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, 3 \\ j = 4, 5, 6 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

le système d'axes adopté étant celui de M. Tisserand (*Mécanique céleste*, t. I, Chap. IV), qui permet de pouvoir obtenir des équations différentielles ne contenant plus, dans le second membre, que les dérivées partielles d'une seule et même fonction.

Les variables qui figurent dans l'expression (2) de F, pouvant s'exprimer en fonction d'autres nouvelles variables, *les variables képlériennes*

$$(b)\qquad \begin{cases} \beta L, & \beta G, & \beta\Theta; & \beta' L', & \beta' G', & \beta'\Theta'; \\ l, & g, & \theta; & l', & g', & \theta', \end{cases}$$

la fonction F dépendra des quantités m_1, m_2, m_3, μ et des variables (b).

Les masses m_2, m_3 étant, en général, très petites par rapport à la masse m_1, on pourra poser

$$(c)\qquad m_2 = \alpha_2 \mu, \qquad m_3 = \alpha_3 \mu$$

et l'on regardera α_2, α_3 et aussi β, β' comme des quantités finies et μ très petit.

Cela étant, F deviendra, finalement, une fonction de m_1, α_2, α_3, des variables képlériennes (b) et du paramètre très petit μ et pourra alors se développer en série, suivant les puissances de μ, sous la forme

$$(3) \qquad F = F_0 + \mu F_1 + \ldots.$$

Le problème général de la Dynamique se ramène à l'étude des équations (1), en supposant pour F un développement de la forme (3), F étant une fonction périodique des y, F_0 fonction des x seulement.

Remarque. — Si dans l'expression de F on fait $\beta' = 0$ ou bien $\beta = 0$, le mouvement devient képlérien.

Pour $\beta' = 0$, par exemple, on aura le mouvement képlérien d'une masse $\beta\mu$, autour d'une masse $m_1 + m_2$ placée à l'origine.

2. Proposons-nous, maintenant, de développer la fonction perturbatrice F_1. Mais avant, nous allons envisager ses différents termes et n'en retenir que ceux qui nous seront utiles pour notre sujet.

Pour avoir l'expression de F_1, nous n'aurons qu'à ramener l'expression (2) de F à la forme (3) en développant en série de μ chacun de ses termes qui sont fonctions de ce paramètre.

Examinons donc chacun de ces termes séparément, en tenant compte du système d'axes choisi.

D'abord, les quantités $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ et $(y_4^2 + y_5^2 + y_6^2)$ ne contiennent, évidemment, pas le paramètre μ; le côté $c = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ non plus. Les quantités α_2, α_3 en dépendent, au contraire, en vertu des relations (a) qui donnent, en ayant égard aux relations (c),

$$\alpha_2 = \beta + \frac{\beta^2}{m_1}\mu + \ldots,$$

$$\alpha_3 = \beta' + \frac{\beta'^2}{m_1}\mu + \ldots.$$

Il en est de même des quantités $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{a}$; on a, en effet,

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{\overline{BD}^2 + r'^2 - 2r'\overline{BD}\cos\omega}} = \frac{1}{\sqrt{(r-\overline{AD})^2 + r'^2 - 2r'(r-\overline{AD})\cos\omega}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\omega + \overline{AD}^2 - 2\overline{AD}(r - r'\cos\omega)}},$$

les quantités r, r', ω sont bien indépendantes de μ, mais la quantité AD en dépend, car on a évidemment

$$(d) \qquad AD = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{\alpha_2 \mu}{m_1 + \alpha_2 \mu} r;$$

l'expression de $\frac{1}{a}$ pourra, par conséquent, se développer en série de μ, le terme indépendant de μ étant

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - rr'\cos\omega}}.$$

Si nous remplaçons de même $\overline{AD}$ par son expression (d), dans $\frac{1}{\sqrt{r^2 - \overline{AD}^2 + 2r'\overline{AD}\cos\omega}}$, $\frac{1}{b}$ deviendra aussi une fonction de μ et le premier terme de la série sera évidemment $\frac{1}{r'}$; quant au second, il nous sera donné par

$$\frac{d\left(\frac{1}{b}\right)}{d\mu} = -\frac{\frac{d}{d\mu}\left(\frac{\alpha_2 \mu}{m_1 + \alpha_2 \mu}\right) rr'\cos\omega}{\left(r'^2 + \overline{AD}^2 + 2r'\overline{AD}\cos\omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(où l'on a négligé un terme qui n'aurait rien donné, quand on aura fait $\mu = 0$).

Le coefficient cherché sera donc

$$\left[\frac{d\left(\frac{1}{b}\right)}{d\mu}\right]_0 = -\frac{\frac{\beta}{m_1} r'\cos\omega}{r'^2}.$$

On aura finalement les deux développements suivants :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\omega}} + \mu(\quad) + \ldots,$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{r'} - \mu\frac{\beta}{m_1}\frac{r\cos\omega}{r'^2} + \mu^2(\quad) + \ldots.$$

Si l'on remplace, maintenant, $\alpha_2, \alpha_3, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ par leur développement en série de μ, dans l'expression (2) de F et si l'on compare ensuite avec (3), on aura l'expression cherchée de la fonction perturbatrice F_1. Cette expression est la suivante

$$(4) \qquad F_1 = -\frac{\beta^2}{r} - \frac{\beta'^2}{r'} + \beta\beta'\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\omega}} + \frac{\beta\beta' r\cos\omega}{r'^2}.$$

Remarquons tout de suite que les deux premiers termes ne donneront pas, dans le développement de F_1 suivant les deux anomalies moyennes, des termes en $\frac{\cos}{\sin}(ml + m'l')$. Nous n'avons pas à en tenir compte. Quant au dernier terme, il peut s'écrire de la manière suivante : Appelons γ l'inclinaison des deux orbites, ν, ν' les longitudes vraies comptées à partir du nœud, ω l'angle des rayons vecteurs r et r', on aura

$$\cos\omega = \cos\nu\cos\nu' + \sin\nu\sin\nu'\cos\gamma,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\beta\beta' r\cos\omega}{r'^2} = \beta\beta'\left(r\cos\nu\frac{\cos\nu'}{r'^2} + \cos\gamma\, r\sin\nu\frac{\sin\nu'}{r'^2}\right).$$

On n'aura plus, de cette façon, que des facteurs dépendant chacun d'une des seules variables l ou l'. Nous n'en tiendrons pas compte non plus. Du reste, on peut démontrer [1] que la présence de ces termes ne modifiera pas sensiblement le résultat final.

---

[1] Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 324.

Il ne reste plus que le terme

$$F_1^0 = \beta_1\beta' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\omega}}$$

qui donnera, dans le développement, des termes en $\frac{\cos}{\sin}(ml + m'l')$.

Ce terme est ce qu'on appelle la *partie principale* de la fonction perturbatrice; c'est de son développement que nous allons nous occuper.

Remarque I. — En général, c'est la fonction $R_1 = \frac{1}{\Delta}$ [1], que l'on désigne de ce nom. Mais il est clair qu'en passant de l'une à l'autre, on n'aura qu'une légère modification des éléments des orbites. La différence tient à ce qu'on a négligé des termes en μ^2 dans l'expression de F_1. D'ailleurs, dans les applications qui vont suivre, c'est R_1 qui a été considéré.

Remarque II. — F_1^0 s'annule pour β ou $\beta' = 0$. Cela devait être ainsi, car nous avons vu que le mouvement devenait, alors, képlérien.

5. On exprime généralement, dans les applications, les coordonnées d'une planète par des séries de cosinus et de sinus de multiples de l'anomalie moyenne.

Il en résulte que, si l'on substitue, à la place de ces coordonnées, leur développement dans la fonction perturbatrice F_1, elle deviendra une fonction périodique des deux anomalies et pourra, par conséquent, se développer en série de la forme suivante :

$$(5) \qquad F_1 = \Sigma K_{m,m'} \frac{\cos}{\sin}(ml + m'l' + m\varpi + m'\varpi'),$$

l, l' désignant les deux anomalies moyennes; $\varpi = g + \theta$, $\varpi' = g' + \theta'$ les longitudes des périhélies (θ, θ' étant les longitudes des nœuds); enfin, m, m' deux nombres entiers quelconques.

---

[1] Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I, p. 292.

Il nous sera avantageux, pour ce qui va suivre, de prendre pour variables, au lieu des anomalies elles-mêmes, les exponentielles imaginaires dont elles sont l'argument et écrire

$$F_1 = \Sigma A_{m,m'} e^{\sqrt{-1}(ml+m'l'+m\varpi+m'\varpi')} ;$$

on pourra même poser

$$A_{m,m'} e^{\sqrt{-1}(m\varpi+m'\varpi')} = B_{m,m'},$$

et l'expression deviendra finalement

$$(6) \qquad F_1 = \Sigma B_{m,m'} e^{\sqrt{-1}(ml+m'l')},$$

les coefficients $B_{m,m'}$ étant des fonctions du rapport des grands axes, des deux excentricités, de l'inclinaison des orbites, des longitudes des périhélies et des nœuds.

4. Revenons, maintenant, à la *partie principale* F_1^0 de la fonction perturbatrice. Son expression sera, évidemment, cette partie de l'expression (6), pour laquelle le rapport $\frac{m}{m'}$ est *fini*. On aura donc

$$(7) \qquad F_1^0 = \Sigma C_{m,m'} e^{\sqrt{-1}(ml+m'l')},$$

et, par conséquent,

$$(8) \qquad C_{m,m'} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1^0 e^{-\sqrt{-1}(ml+m'l')} \, dl \, dl'.$$

Voici, maintenant, les hypothèses que nous allons faire. Il s'agit de calculer une expression approchée du coefficient $C_{m,m'}$ en supposant que le terme correspondant est de rang *très élevé*. Il en résulte que m, m' devront être des entiers très grands et, comme leur rapport est fini, on pourra toujours écrire

$$\frac{m}{m'} = \frac{an+b}{cn+d},$$

a, b, c, d étant des entiers finis et n un entier très grand. De plus, nous nous plaçons dans le cas des *inégalités à longue période*. C'est le cas pour lequel, avons-nous dit, ce genre de recherches offre particulièrement un grand intérêt. Nous aurons donc, si nous désignons par ν et ν' les moyens mouvements des planètes, la relation approximative

$$a\nu + c\nu' = 0.$$

Il faudra, par conséquent, que les entiers a et c n'aient pas le même signe. Nous supposerons, par exemple, $c > 0$ et $a < 0$.

Ces hypothèses faites, reprenons l'exponentielle qui figure dans (7) et écrivons-la comme il suit :

$$e^{\sqrt{-1}(ml+m'l')} = e^{\sqrt{-1}(al+cl')n} \times e^{\sqrt{-1}(bl+dl')}.$$

Posons, avec M. Poincaré,

$$e^{\sqrt{-1}l} = t^c, \qquad e^{\sqrt{-1}l'} = t^{-a} z^{\frac{1}{c}},$$

l'expression (7) de F_1^0 deviendra

$$(7') \qquad F_1^0 = \Sigma C_{an+b,cn+d} z^n z^{\frac{d}{c}} t^{bc-da},$$

et, si nous posons encore

$$(e) \qquad F_1^0 t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}} = F(z, t),$$

on aura pour expression de $C_{an+b,cn+d}$:

$$(8') \quad C_{an+b,cn+d} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{|z|=1} z^{-n-1} dz \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{|t|=1} F(z, t)\, dt,$$

les intégrales étant, cette fois, prises le long des circonférences $|z| = 1$ et $|t| = 1$.

L'intégrale le long du contour $|t| = 1$ deviendra, une fois effectuée, une fonction de z seulement. Soit $\Phi(z)$ cette fonction

$$(f) \qquad \Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi} \int_{|t|=1} F(z, t)\, dt,$$

et, par conséquent,

$$(9) \qquad C_{an+b,cn+d} = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\int_{|z|=1} z^{-n-1}\,\Phi(z)\,dz.$$

Supposons, maintenant, que $\Phi(z)$ puisse se développer en une double série, sous la forme

$$(1) \qquad \Phi(z) = \Sigma a_n z^n + \Sigma a_{-n} z^{-n}.$$

En remplaçant son développement dans (9) et en remarquant que toutes les intégrales telles que

$$\int z^{-n-1} z^{\nu}\,dz$$

sont *nulles*, sauf celle qui correspond à $\nu = n$, qui est égale à $2\sqrt{-1}\,\pi$, on trouve

$$(10) \qquad C_{an+b,cn+d} = a_n.$$

Le problème se ramène ainsi à la recherche de l'expression approchée de a_n, c'est-à-dire à la recherche des *singularités* de $\Phi(z)$; l'expression approchée de a_n dépendant uniquement de la nature des points singuliers de $\Phi(z)$ sur les contours de convergence.

3. Supposons, en effet, que nous ayons trouvé les points singuliers de $\Phi(z)$ et soient α et α' deux de ces points situés sur la circonférence R et β, β' deux autres points situés sur la circonférence $r (r < R)$.

Voici quel est, maintenant, le théorème de M. Darboux [1], généralisé par M. Flamme [2].

Le développement de $\Phi(z)$ dans le voisinage des points α, α' étant

---

[1] Darboux, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques*, 1878).

[2] Flamme, *Thèse inaugurale;* Gauthier-Villars, 1887.

connu, appelons $\Phi_\alpha(z)$, $\Phi_{\alpha'}(z)$ les parties non holomorphes de ce développement, correspondant aux deux points singuliers.

Soient

$$\Phi_\alpha(z) = \Sigma a'_n z^n, \qquad \Phi_{\alpha'}(z) = \Sigma a''_n z^n,$$

les développements de ces fonctions à l'intérieur du contour R et même sur le contour, sauf respectivement aux points α, α'. Il est clair que la différence

$$\Psi(z) = \Phi(z) - \Phi_\alpha(z) - \Phi_{\alpha'}(z) = \Sigma(a_n - a'_n - a''_n)z^n + \Sigma a_{-n} z^{-n}$$

sera holomorphe même aux points α et α'. Dans ces conditions M. Darboux démontre que

$$\lim_{n=\infty}(a_n - a'_n - a''_n) = \frac{K}{R^n n^{p+1}},$$

p étant l'ordre de la dernière dérivée de $\Psi(z)$, qui reste finie aux points α, α' et K désigne une quantité finie.

On pourra donc prendre, pour n très grand, la somme $a'_n + a''_n$, des coefficients de z^n dans Φ_α, $\Phi_{\alpha'}$, pour valeur approchée de a_n. L'erreur commise sera de l'ordre de $\frac{1}{n^{p+1}}$.

Par un raisonnement entièrement analogue, on verra que

$$\lim_{n=\infty}(a_{-n} - b'_{-n} - b''_{-n}) = \frac{r^n K}{n^{p+1}},$$

en désignant par b'_{-n}, b''_{-n} les coefficients du terme d'ordre n, dans deux fonctions $\Phi_\beta(z)$, $\Phi_{\beta'}(z)$ holomorphes à l'extérieur du contour r et même sur le contour, sauf respectivement aux points β, β'.

Remarque I. — Nous avons supposé qu'il n'y avait que deux points singuliers sur chacune des circonférences R et r. Il est clair que, s'il y en avait plusieurs, on obtiendrait pour valeur approchée de a_n et de a_{-n} des sommes telles que $\Sigma a'_n$, $\Sigma b'_{-n}$ respectivement.

Si, au contraire, les points α et β étaient les seuls points situés sur les contours de convergence, a'_n sera la valeur approximative de a_n et b'_{-n} la valeur approchée de a_{-n}.

Remarque II. — Il serait intéressant de connaître *a priori* le nombre n' des points singuliers, situés sur le contour limite de convergence. Il est évident que la méthode précédente ne serait réellement avantageuse que si l'on avait $n' < n$ (c'est ce qui a effectivement lieu en général). Peut-être pourrait-on y arriver en partant des théorèmes de M. Hadamard (Mémoire déjà cité).

6. Voyons maintenant comment nous allons chercher les points singuliers de $\Phi(z)$. Rappelons-nous que nous avons appelé $\Phi(z)$ l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=1} F(z, t)\,dt,$$

prise le long de la circonférence $|t| = 1$.

$F(z, t)$ sera, en général, une fonction multiforme; on l'étudiera donc sur une surface Σ de Riemann, ayant un nombre de feuillets égal au nombre des *déterminations*, ce nombre pouvant, d'ailleurs, être quelconque. Sur chacun des feuillets, on aura un certain nombre de points singuliers de la détermination correspondante.

Considérons une de ces déterminations et soit σ le feuillet qui lui correspond. Traçons le cercle $|t| = 1$ sur ce feuillet. Tout le long de ce contour $F(z, t)$ sera holomorphe. En effet, prendre $|t| = 1$, c'est considérer *réelle* l'anomalie l, qui définit un point réel sur l'orbite. Quel que soit alors z, c'est-à-dire l', la fonction $F(z, t)$ ne cessera évidemment pas d'être holomorphe. Il n'y a qu'un cas où elle pourrait devenir infinie : c'est celui où l'on aurait à la fois $|t| = 1$, $|z| = 1$. Les anomalies moyennes l et l' seraient toutes les deux réelles, elles définiraient alors deux points réels dont la distance pourrait être *nulle* et, par suite, F_1^0 ou, ce qui revient au même, $F(z, t)$ *infinie*. Mais ce cas ne peut pas avoir lieu dans le mouvement des planètes, les orbites ne se coupant pas (sauf, bien entendu, le cas d'une planète et d'une comète).

$F(z, t)$ étant holomorphe pour cette valeur de t, et quel que soit z, $\Phi(z)$ sera une fonction holomorphe en z. Mais il est clair que cela ne peut pas avoir lieu, en général, quel que soit t.

$F(z, t)$ aura, en général, un certain nombre de points singuliers dans le plan de la variable t.

Allons maintenant à la rencontre de ces points en déformant le contour d'intégration $|t| = 1$. La valeur de l'intégrale sera, comme on sait, la même et continuera à définir une fonction holomorphe de z, $\Phi(z)$, tant qu'on n'aura pas rencontré en son chemin un point singulier. Si l'on en rencontre, on pourra les éviter, sauf, cependant, dans un cas.

Supposons, en effet, que nous fassions maintenant varier z, les points singuliers de tout à l'heure se déplaceront; il pourrait se faire alors que deux quelconques de ces points, se trouvant l'un à l'intérieur, l'autre à l'extérieur du contour d'intégration, vinssent à coïncider pour une certaine valeur de z. Il ne nous sera plus possible alors d'éviter un pareil point, en déformant le contour, et la fonction $\Phi(z)$ *cessera d'être holomorphe*. Or, comme ce point, pour cette valeur particulière de z, est *double* pour $F(z, t)$, on aura donc *tous les points critiques de* $\Phi(z)$ *en résolvant le système suivant d'équations :*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{F(z, t)} = 0, \\ &\frac{\partial\left[\frac{1}{F(z, t)}\right]}{\partial t} = 0, \end{aligned}\right.$$

ou bien le suivant :

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta = 0, \\ &\frac{d\Delta}{dt} = 0, \end{aligned}\right.$$

$\frac{1}{F}$ ne différant de Δ (le carré de la distance des planètes) que par une puissance entière en $\frac{1}{t}$, qui figure déjà dans Δ.

7. Tous les points *doubles*, obtenus par la résolution du système (1), ne sont évidemment pas *singuliers* pour $\Phi(z)$. Il y en a, en effet, qui ont pu devenir doubles par la rencontre de deux des points singuliers de $F(z, t)$, qui se seraient trouvés primitivement d'un même côté du contour. Or, nous venons de voir que de pareils points ne sont pas singuliers pour $\Phi(z)$.

Voici, par conséquent, comment il faudra procéder pour reconnaître les points singuliers qui doivent répondre à la question.

Supposons que nous ayons trouvé tous les points satisfaisant au système d'équations (1). Soient ζ, τ les coordonnées d'un de ces points. Faisons varier ζ d'une façon quelconque, le long d'une droite, par exemple, dans un sens convenable, afin que nous arrivions sur le contour $|z| = 1$ (auquel correspond le contour $|t| = 1$ dans le plan de la variable t). Quand $|\zeta|$ variera, les deux points primitivement confondus se sépareront, et lorsque $|\zeta|$ aura atteint la valeur 1, les deux points auront pris leur position finale dans le plan de la variable t. *Suivant que ces deux positions finales se trouveront d'un côté et de l'autre du contour, ou bien toutes les deux du même côté, le point* (ζ, τ) *sera ou non singulier pour* $\Phi(z)$.

De tous les points singuliers ainsi obtenus, celui, parmi ceux qui ont le module plus grand que 1, qui aura le module *minimum*, donnera le rayon R de la circonférence limite de convergence et, par conséquent, en vertu du théorème de M. Darboux, la valeur approchée de a_n.

Le rayon r du cercle intérieur sera donné par le module de l'affixe le plus éloigné de l'origine à l'intérieur du cercle $|t| = 1$.

Remarque. — S'il y avait plusieurs points singuliers également éloignés de l'origine, ils se trouveront sur une même circonférence de convergence, et le théorème de M. Darboux restera applicable (I, 4, *Remarque*).

8. Nous appliquerons le raisonnement précédent surtout dans le cas (et nous en verrons un exemple) où nous aurions, par un changement convenable de variables, réduit à deux le nombre de déterminations de la fonction $F(z, t)$. Mais il sera légèrement modifié dans le cas général où, $F(z, t)$ étant multiforme, on fera varier t sur la surface de Riemann correspondante. Dans ce dernier cas, c'est sur cette surface Σ que nous tracerons le contour Γ. En faisant varier z, la surface Σ variera, et, lorsque z aura atteint la valeur de module égal à 1 (en suivant, par exemple, toujours la droite D), le contour Γ deviendra le cercle

$$|z| = 1, \qquad |t| = 1$$

sur une surface Σ_0, et les positions finales des points primitivement confondus devront se trouver non pas toutes dans la même région, mais

dans les deux régions que séparent sur la surface Σ_0 le cercle $|z| = 1$, $|t| = 1$.

On aura, par exemple, une sphère pour surface de Riemann si $F(z, t)$ est uniforme. Les deux régions seront : la petite calotte sphérique, obtenue par le petit cercle polaire $|z| = 1$, $|t| = 1$, tracé autour d'un point qui servira à la fois d'origine au plan primitivement considéré, et l'autre calotte. On voit bien ici que, non seulement les positions finales d'un point singulier, pour $\Phi(z)$, se trouveront dans les deux régions de la sphère, mais, comme nous avons déjà vu dans le cas du plan, elles auront leur module correspondant respectivement plus petit et plus grand que l'unité. Cela n'arrivera pas ainsi, en général, avec une surface de Riemann quelconque, si les points singuliers n'appartiennent pas au même feuillet. Nous y reviendrons, du reste, plus loin.

II.

9. Les difficultés que l'on rencontre dans ce genre de recherches, difficultés provenant, d'une part, de la résolution des équations

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dt} = 0, \tag{1}$$

dont le degré est très élevé dans le cas général, d'autre part, de la discussion très délicate pour reconnaître quels sont, parmi tous les points singuliers, ceux qui répondent à la question, empêchent d'aborder le problème dans toute sa généralité. C'est en examinant ce qui se passe dans les cas les plus simples que l'on pourra surmonter quelques-unes des difficultés qui surgissent dans le cas général.

Nous sommes donc naturellement conduits à considérer le mouvement des trois corps dans le plan. L'inclinaison nulle abaisse de beaucoup le degré des équations (1). On supposera, de plus, que l'orbite d'une des planètes est circulaire et l'excentricité de l'autre petite.

C'est le cas déjà considéré par M. Poincaré que nous allons reprendre et compléter, en y apportant aussi quelques légères modifications. Les notations employées seront, autant que possible, celles de M. Poincaré.

Soient :

X, Y les coordonnées de P par rapport au grand axe de son orbite et à une perpendiculaire passant par le foyer; l, u, $e = \sin\varphi$, L^2, respectivement : l'anomalie moyenne, l'anomalie excentrique, l'excentricité de l'orbite et le demi grand axe;

X_1, Y_1, l', u', $e' = \sin\varphi'$, L'^2 des quantités analogues pour la planète P'; X', Y' les coordonnées de la même planète par rapport au premier système d'axes.

On a

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{cases} l = u - \sin\varphi \sin u, \\ X = L^2(\cos u - \sin\varphi), \\ Y = L^2 \cos\varphi \sin u, \end{cases}$$

$$(\mathrm{P}')\qquad \begin{cases} l' = u' - \sin\varphi' \sin u', \\ X' = L'^2(\cos u' - \sin\varphi'), \\ Y' = L'^2 \cos\varphi' \sin u'. \end{cases}$$

On en déduit

$$(a)\qquad \begin{cases} X + \sqrt{-1}\,Y = L^2\,(\cos u - \sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi \sin u), \\ X_1 + \sqrt{-1}\,Y_1 = L'^2(\cos u' - \sin\varphi' + \sqrt{-1}\cos\varphi' \sin u'). \end{cases}$$

On regardera, par conséquent, les coordonnées comme les parties réelle et imaginaire dans $L^2\xi$, $L'^2\eta$, en posant

$$(b)\qquad \begin{cases} \xi = \cos u - \sin\varphi + \sqrt{-1}\cos\varphi \sin u, \\ \eta = \cos u' - \sin\varphi' + \sqrt{-1}\cos\varphi' \sin u'. \end{cases}$$

Et comme il nous faudra avoir pour P' l'expression non pas de X_1 et Y_1, mais de X', Y', on n'aura qu'à faire une transformation connue, en introduisant l'angle $\varpi' - \varpi$, différence des longitudes des deux périhélies.

On arrivera facilement à

$$(c)\qquad X' + iY' = L'^2\eta e^{\sqrt{-1}(\varpi'-\varpi)} = L^2\eta\beta.$$

Formons maintenant les équations (1) [I, 5].

On a

$$\begin{aligned}\Delta &= (X - X')^2 + (Y - Y')^2 \\ &= X^2 + Y^2 + X'^2 + Y'^2 - 2(XX' + YY'),\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\Delta = (X + iY)(X - iY) + (X' + iY')(X' - iY') \\ - [(X + iY)(X' - iY') + (X - iY)(X' + iY')].\end{aligned}$$

Appelons ξ_0, η_0, β_0 les conjuguées de ξ, η, β, à savoir :

$$(d) \qquad \begin{cases} \xi_0 = \cos u - \sin \varphi - \sqrt{-1}\cos\varphi \sin u, \\ \eta_0 = \cos u' - \sin \varphi' - \sqrt{-1}\cos\varphi' \sin u', \\ \beta_0 = L'^2 L^{-2} e^{-\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)}, \end{cases}$$

β désignant l'expression $L'^2 L^{-2} e^{\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)}$.

D'où

$$(e) \qquad \begin{cases} X - iY = L^2 \xi_0, \\ X' - iY' = L'^2 \eta_0 e^{-\sqrt{-1}(\varpi' - \varpi)} = L^2 \eta_0 \beta_0. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\Delta = L^4(\xi\xi_0 + \beta\beta_0\eta\eta_0 - \xi\eta_0\beta_0 - \xi_0\eta\beta),$$

et finalement

$$(2) \qquad \Delta = L^4(\xi - \beta\eta)(\xi_0 - \beta_0\eta_0).$$

Les points singuliers de $F(z, t)$ seront d'abord les racines de l'équation

$$\Delta = 0,$$

ensuite les points communs aux équations

$$\Delta = \frac{d\Delta}{dt} = 0,$$

et enfin les points pour lesquels ξ, η, ξ_0, η_0 cesseront d'être des fonctions uniformes en z et t. Ces derniers points étant précisément ceux pour lesquels u et u' cessent d'être uniformes en l et l' seront donnés par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{dl}{du} = 1 - \sin\varphi\cos u = 0, \\[2ex] \dfrac{dl'}{du'} = 1 - \sin\varphi'\cos u' = 0. \end{cases}$$

Quant aux autres points singuliers, on les obtiendra en remplaçant le système d'équations (1) par le suivant, qui lui est équivalent :

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{E} = \cos u - \sin\varphi + i\cos\varphi\sin u - \beta(\cos u' - \sin\varphi' + i\cos\varphi'\sin u') = 0, \\ \mathrm{E}_0 = \cos u - \sin\varphi - i\cos\varphi\sin u - \beta_0(\cos u' - \sin\varphi' - i\cos\varphi'\sin u') = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{E}}{dt} = \dfrac{i}{t}\left[\dfrac{c(-\sin u + i\cos\varphi\cos u)}{1 - \sin\varphi\cos u} + \beta\dfrac{a(-\sin u' + i\cos\varphi'\cos u')}{1 - \sin\varphi'\cos u'}\right] = 0, \\ \dfrac{d\mathrm{E}_0}{dt} = \dfrac{i}{t}\left[\dfrac{c(\sin u + i\cos\varphi\cos u)}{1 - \sin\varphi\cos u} + \beta_0\dfrac{a(\sin u' + i\cos\varphi'\cos u')}{1 - \sin\varphi'\cos u'}\right] = 0, \end{cases}$$

E, E_0 désignant les facteurs qui entrent dans Δ.

En combinant deux à deux les équations (3) et les deux premières de (4), nous aurons une première série de points singuliers de $\Phi(z)$, que nous appellerons, avec M. Poincaré, de *première espèce*. La combinaison des équations

$$\mathrm{E} = 0, \qquad \frac{d\mathrm{E}}{dt} = 0$$

et aussi celle de

$$\mathrm{E}_0 = 0, \qquad \frac{d\mathrm{E}_0}{dt} = 0$$

donneront les points singuliers de *deuxième espèce*.

Remarque. — Les équations (3) et (4) montrent que les points de deuxième espèce seuls dépendent des entiers a et c.

10. Pour résoudre les équations précédentes, nous allons les rendre algébriques; il suffit, pour cela, de remplacer les $\frac{\cos}{\sin}$ u ou u' par les

exponentielles. En posant alors

$$(f)\quad \begin{cases} e^{iu} = x, \qquad e^{iu} = y, \\ \text{et, par suite,} \\ \cos u = \dfrac{x^2+1}{2x}, \qquad \cos u' = \dfrac{y^2+1}{2y}, \\ \sin u = \dfrac{x^2-1}{2ix}, \qquad \sin u' = \dfrac{y^2-1}{2iy}, \end{cases}$$

les équations (3) et (4) deviendront

$$(5)\quad \begin{cases} 2x - \sin\varphi\,(x^2+1) = 0, \\ 2y - \sin\varphi'(y^2+1) = 0, \\ y[(x^2+1) - 2x\sin\varphi + \cos\varphi(x^2-1)] \\ \qquad - \beta x[(y^2+1) - 2y\sin\varphi' + \cos\varphi'(y^2-1)] = 0, \\ y[(x^2+1) - 2x\sin\varphi - \cos\varphi(x^2-1)] \\ \qquad - \beta_0 x[(y^2+1) - 2y\sin\varphi' - \cos\varphi'(y^2-1)] = 0, \\ \dfrac{c[\cos\varphi(x^2+1) + (x^2-1)]}{2x - \sin\varphi(x^2+1)} + \beta\,\dfrac{a[\cos\varphi'(y^2+1) + (y^2-1)]}{2y - \sin\varphi'(y^2+1)} = 0, \\ \dfrac{c[-\cos\varphi(x^2+1) + (x^2-1)]}{2x - \sin\varphi(x^2+1)} + \beta_0\,\dfrac{a[-\cos\varphi'(y^2+1) + (y^2-1)]}{2y - \sin\varphi'(y^2+1)} = 0. \end{cases}$$

Remarque. — Si l'on change x en $\frac{1}{x}$, y en $\frac{1}{y}$ la première et la deuxième des équations (5) ne changent pas; la troisième se permute avec la quatrième et la cinquième avec la sixième. Il en résulte que, si x, y est un point singulier, son réciproque $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ le sera aussi, et les rayons des cercles limites de convergence seront réciproques.

Nous aurons donc autant de points singuliers de module plus petit que 1, qu'il y en aura, ayant le module plus grand que 1.

Commençons maintenant par le cas où l'une des orbites est circulaire. Soit $e' = \sin\varphi' = 0$ et, en supposant petite l'excentricité de l'autre, posons

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \tau.$$

Pour simplifier, nous pourrons supposer, de plus, $\varpi' - \varpi = 0$. En effet, l'orbite de P′ étant maintenant circulaire, on prendra pour son grand axe le diamètre de même direction avec le grand axe de l'autre orbite. $\varpi' - \varpi$ étant nul, β sera égal à $\beta_0 = L'^2 L^{-2} = \alpha$, en désignant par α le rapport des grands axes, $\alpha > 1$ dans notre hypothèse.

Les équations (5) deviendront alors

$$(6) \qquad x(1+\tau^2) - \tau(1+x^2) = (x-\tau)(1-x\tau) = 0,$$

$$(7) \qquad y = \frac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x},$$

$$(8) \qquad y = \frac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2},$$

$$(9) \qquad \frac{c(x+\tau)}{1-x\tau} + a\alpha y = 0,$$

$$(10) \qquad \frac{c(1+x\tau)}{x-\tau} + \frac{a\alpha}{y} = 0.$$

Résolvons ces équations pour avoir les coordonnées de tous les points singuliers. D'abord :

Points singuliers de première espèce. — Ces points nous seront donnés (II, 9) par la combinaison deux à deux des équations (6), (7) et (8). On négligera les carrés de τ. On aura

$$\begin{cases} (6) & (x-\tau)(1-x\tau) = 0, \\ (7) & y = \dfrac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}, \end{cases} \qquad (\alpha) \begin{cases} x = \tau, \\ y = 0. \end{cases} \qquad (\beta') \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \dfrac{1}{\alpha\tau}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6) & (x-\tau)(1-x\tau) = 0, \\ (8) & y = \dfrac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}, \end{cases} \qquad (\beta) \begin{cases} x = \tau, \\ y = \alpha\tau, \end{cases} \qquad (\alpha) \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (7) & y = \dfrac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}, \\ (8) & y = \dfrac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}. \end{cases}$$

On en déduit les équations suivantes :

$$(x-\tau)(1-x\tau)=\pm\alpha x, \tag{11}$$

dont les racines approchées sont : $x=\frac{1-\alpha}{\tau}$, $x=\frac{1+\alpha}{\tau}$, et comme ces équations ne changent pas, quand on change x en $\frac{1}{x}$, on aura aussi les racines inverses des précédentes : $x=\frac{\tau}{1-\alpha}$, $x=\frac{\tau}{1+\alpha}$, qui donneront les points singuliers réciproques des premiers.

Si l'on substitue ces quatre valeurs de x dans l'une ou l'autre des équations (7) et (8), nous obtenons les points singuliers suivants :

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x=\frac{\tau}{1-\alpha}, \\ y=\frac{\alpha\tau}{1-\alpha}, \end{cases} \qquad (\gamma')\quad \begin{cases} x=\frac{1-\alpha}{\tau}, \\ y=\frac{1-\alpha}{\alpha\tau}. \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} x=\frac{\tau}{1+\alpha}, \\ y=\frac{\alpha\tau}{1+\alpha}, \end{cases} \qquad (\delta')\quad \begin{cases} x=\frac{1+\alpha}{\tau}, \\ y=\frac{1+\alpha}{\alpha\tau}. \end{cases}$$

Points singuliers de deuxième espèce. — On les obtient par la combinaison des équations (7) et (9), (8) et (10).

Des deux premières, on déduit l'équation

$$\frac{c(x+\tau)}{1-x\tau}+\frac{a(x-\tau)^2}{(1+\tau^2)x}=0; \tag{12}$$

des deux dernières, on tire

$$\frac{c(1+x\tau)}{x-\tau}+\frac{a(1-x\tau)^2}{(1+\tau^2)x}=0. \tag{13}$$

Considérons l'équation (12) et cherchons à y satisfaire par des valeurs de x de la forme $x=\lambda\tau$. L'équation (12) se réduira à la suivante :

$$\begin{aligned} a\tau^2\lambda^3-[(c+a)+(c+2a)\tau^2]\lambda^2 \\ -[(c-2a)+(c-a)\tau^2]\lambda-a=0; \end{aligned} \tag{14}$$

les valeurs petites de x et par conséquent finies de λ seront données par l'équation

$$(15) \qquad (c+a)\lambda^2 + (c-2a)\lambda + a = 0,$$

dont les racines sont

$$\lambda = \frac{-(c-2a) \pm \sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}.$$

On aura, en outre, une racine approchée très grande

$$\lambda = \frac{c+a}{a\tau^2},$$

et, par conséquent, les valeurs de x qui satisferont à l'équation (12) seront

$$x = \tau\frac{-(c-2a) \pm \sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{c+a}{a\tau}.$$

Il est inutile de résoudre l'équation (13) réciproque de (12). Il suffira de considérer la réciproque de (15), à savoir :

$$(16) \qquad a\lambda^2 + (c-2a)\lambda + (c+a) = 0,$$

dont les racines et, par suite, les valeurs de x, satisfaisant à l'équation (13), seront

$$x = \frac{-(c-2a) \pm \sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau} \qquad \text{et} \qquad x = \frac{a\tau}{c+a}.$$

En substituant dans les valeurs correspondantes de y, nous obtiendrons, finalement, les points singuliers suivants :

$$(\varepsilon) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a\tau}{c+a}, \\ y = \alpha\dfrac{a\tau}{c+a}, \end{cases}$$

$$(\varepsilon') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{c+a}{a\tau}, \\ y = \dfrac{c+a}{\alpha a\tau}, \end{cases}$$

$$(\mu)\quad \begin{cases} x = -\tau\dfrac{c-2a+\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \\ y = -\tau\dfrac{c}{\alpha a}\,\dfrac{c+4a-\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \end{cases}$$

$$(\mu')\quad \begin{cases} x = \dfrac{-(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau}, \\ y = -\alpha\dfrac{c+4a+\sqrt{c(c-8a)}}{8c\tau}, \end{cases}$$

$$(\nu)\quad \begin{cases} x = \tau\dfrac{-(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \\ y = -\tau\dfrac{c}{\alpha a}\,\dfrac{c+4a+\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \end{cases}$$

$$(\nu')\quad \begin{cases} x = -\dfrac{(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau}, \\ y = -\alpha\dfrac{c+4a-\sqrt{c(c-8a)}}{8c\tau}, \end{cases}$$

Nous avons ainsi le Tableau suivant de tous les points singuliers trouvés :

TABLEAU A.

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = 0, \end{cases} \qquad (\alpha')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \infty, \end{cases}$$

$$(\beta)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \alpha\tau, \end{cases} \qquad (\beta')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \dfrac{1}{\alpha\tau}, \end{cases}$$

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau}{1-\alpha}, \\ y = \dfrac{\alpha\tau}{1-\alpha}; \end{cases} \qquad (\gamma')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1-\alpha}{\tau}, \\ y = \dfrac{1-\alpha}{\alpha\tau}, \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau}{1+\alpha}, \\ y = \dfrac{\alpha\tau}{1+\alpha}, \end{cases} \qquad (\delta')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1+\alpha}{\tau}, \\ y = \dfrac{1+\alpha}{\alpha\tau}, \end{cases}$$

TABLEAU A (suite).

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a\tau}{c+a}, \\ y = \alpha\dfrac{a\tau}{c+a}, \end{cases} \qquad (\varepsilon')\quad \begin{cases} x = \dfrac{c+a}{a\tau}, \\ y = \dfrac{c+a}{\alpha a\tau}, \end{cases}$$

$$(\mu)\quad \begin{cases} x = -\tau\dfrac{(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \\ y = \dfrac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}, \end{cases} \qquad (\mu')\quad \begin{cases} x = \dfrac{-(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau}, \\ y = \dfrac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}, \end{cases}$$

$$(\nu)\quad \begin{cases} x = \tau\dfrac{-(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2(c+a)}, \\ y = \dfrac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}, \end{cases} \qquad (\nu')\quad \begin{cases} x = -\dfrac{(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau}, \\ y = \dfrac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, et en vue de la discussion qui va suivre, on a gardé l'y des derniers points, exprimé en fonction de x.

Remarque. — Tous les points sont réels avec les hypothèses faites (*voir* I, **4** et II, **10**).

On a désigné par α, β, γ, δ, ε, μ et ν les points singuliers de module < 1; par les mêmes lettres accentuées, les points respectivement réciproques des précédents.

11. Il s'agit, maintenant, de faire la discussion du § I, **7**. Reprenons la fonction $F(z, t)$. Cette fonction, avons-nous dit, n'est pas uniforme; elle peut même avoir un nombre infini de déterminations. En effet, considérons son expression :

$$F(z, t) = \frac{t^{ad-bc-1}\, z^{-\frac{d}{c}}}{\sqrt{\Delta}}$$

et examinons comment elle va se comporter, quand on exprimera Δ en fonction de z et de t.

Regardée comme fonction de x et y, Δ est uniforme. Cela est évident d'après son expression (2) (II, **9**). Mais il n'en sera plus ainsi, si on l'exprime en fonction de z et t.

On a, en effet, pour t et z exprimées en x et y, les expressions suivantes :

$$(g)\qquad \begin{cases} t = x^{\frac{1}{c}} e^{\frac{\tau}{c(1+\tau^2)}\left(\frac{1}{x}-x\right)}, \\ z = x^a e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} y^c e^{\frac{c\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{y}-y\right)}, \end{cases}$$

qui montrent bien qu'à chaque système de valeurs de t et z correspond une infinité de valeurs pour x et y.

Il en résultera une infinité de déterminations pour Δ et par conséquent une double infinité pour $F(z, t)$.

Mais voyons si, dans le cas particulier que nous traitons, il y a moyen de réduire à un plus petit nombre les déterminations qui se présentent dans le cas général.

Remarquons que, dans ce dernier cas, les relations (g) se réduisent aux suivantes :

$$(h)\qquad \begin{cases} t = x^{\frac{1}{c}} e^{\frac{\tau}{c}\left(\frac{1}{x}-x\right)}, \\ z = y^c x^a e^{a\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)}. \end{cases}$$

La première des équations (h) montre encore que x est fonction multiforme de t. Nous n'introduirons donc pas la variable t dans Δ, et nous garderons x ou mieux $x^{\frac{1}{c}}$, dont elle est fonction uniforme. Mais nous pourrons introduire à la place de y l'autre variable z ou bien $z^{\frac{1}{c}}$ dont elle est fonction uniforme. La deuxième équation (h) montre bien que

$$(j)\qquad y = z^{\frac{1}{c}} x^{-\frac{a}{c}} e^{-\frac{a\tau}{c}\left(\frac{1}{x}-x\right)}$$

est uniforme en $z^{\frac{1}{c}}$ et $x^{\frac{1}{c}}$. Nous aurons ainsi exprimé Δ en fonction uniforme de $x^{\frac{1}{c}}$ et $z^{\frac{1}{c}}$. D'autre part, le numérateur de $F(z, t)$ est évidemment fonction uniforme par rapport aux mêmes variables.

Nous avons donc ramené la fonction $F(z, t)$ ayant une infinité de déterminations à une fonction $F_1\left(z^{\frac{1}{c}}, x^{\frac{1}{c}}\right)$ n'ayant plus que deux déterminations, celles du radical.

La surface de Riemann à une infinité de feuillets se ramène à une autre, n'ayant plus que deux feuillets et définie au moyen de la relation (j).

Nous pourrons même nous dispenser de la considération de cette surface, car si l'on regarde un moment $z^{\frac{1}{c}}$ comme constante, comme à chaque valeur de $x^{\frac{1}{c}}$ ne correspondent plus que deux valeurs égales et de sens contraires pour $F_1\left(z^{\frac{1}{c}}, x^{\frac{1}{c}}\right)$, nous n'aurons qu'à tracer les contours d'intégration dans le plan de la variable $x^{\frac{1}{c}}$. Ce contour était le cercle $|t| = 1$ dans le plan de la variable t; il sera par conséquent le cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ et cela quand la variable $z^{\frac{1}{c}}$ aura atteint une valeur de module égal à 1.

Pour des valeurs de z de module autre que 1, les contours d'intégration par rapport à $x^{\frac{1}{c}}$ s'obtiendront, comme nous l'avons déjà dit, en déformant la circonférence $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, sans passer par un point singulier.

12. Cela étant, voyons quels sont maintenant, parmi les points singuliers du Tableau A, ceux qui répondent à la question (I, **7**).

D'abord, le module du point α est évidemment nul.

Il ne donnera rien et nous n'aurons pas à nous en occuper. Il en sera de même de α'.

Quant au point β, il est facile de voir, *a priori*, qu'il ne sera pas singulier pour $\Phi(z)$. On a, en effet, l'expression suivante de $\Phi(z)$, par rapport aux variables $x^{\frac{1}{c}}$, $z^{\frac{1}{c}}$,

$$\Phi(z) = \frac{1}{c(1+\tau^2)}\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\left|x^{\frac{1}{c}}\right|=1} F\left(z^{\frac{1}{c}}x^{\frac{1}{c}}\right) x^{\frac{1}{c}}\, e^{\frac{\tau}{c(1+\tau^2)}\left(\frac{1}{x}-x\right)}\,\frac{(x-\tau)(1-x\tau)}{x^2}\,dx.$$

qui montre bien que $x = \tau$, $x = \frac{1}{\tau}$ et par conséquent les points β, β' ne sont pas critiques pour cette fonction.

Il ne nous reste plus que cinq points singuliers à discuter. Des cinq

points, il y en a deux, à savoir : ν et δ (et leur réciproque), dont les x sont positifs et par suite leur z est réel et positif. De plus, l'x de ν est inférieur à celui de δ; ces deux points se trouveront, par conséquent, dans le premier quadrant et l'affixe de ν sera plus rapproché de l'origine que celui de δ.

Commençons par le point ν. Je dis que le module de z est maximum en ce point. On a, en effet, pour z, l'expression

$$z = y^c x^a e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)},$$

ou bien, si l'on y substitue la valeur de y correspondante au point ν, la suivante :

$$z = \frac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}\, x^a e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-1\right)};$$

en formant l'équation $\frac{dz}{dx} = 0$, on verra qu'on retombe sur l'équation (14) (II, n° **10**), dont les racines sont précisément les x des points ν, μ et ε'. Donc non seulement le $|z|$ de ν, mais celui de μ et de ε' aussi, sera un maximum ou bien un minimum. Il est clair qu'il en sera de même de $|z|$ aux points ν', μ' et ε. Cela était d'ailleurs évident, car tous ces points de deuxième espèce sont des points de contact entre la famille de courbes

$$(k) \qquad z = y^c x^a e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} = \text{const.}$$

et les courbes $y = \frac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}$ et $y = \frac{\alpha(1+\tau)x}{(1-x\tau)^2}$ donnant leur ordonnée.

Nous venons de voir que $|z|$ est maximum ou minimum. Pour voir qu'il est maximum et non minimum, il suffira de faire varier x d'une façon continue à partir d'une valeur inférieure à celle du point ν, à partir de la valeur zéro, par exemple. Pour $x = 0$, on a évidemment $|z| = 0$; en faisant croître x, $|z|$ croîtra aussi et comme (d'après ce qu'il a été dit plus haut) on n'aura plus à craindre la rencontre d'un autre point singulier, on sera certain d'arriver en ν avec une valeur maxima de $|z|$.

Ces préliminaires faits, faisons maintenant varier z le long de la droite D(I, n° 7). Cette droite sera ici la partie positive de l'axe des x, x et z étant réels et positifs.

Lorsque $z^{\frac{1}{c}}$ variera en partant de la valeur correspondante au point ν, les deux points singuliers de $F\left(z^{\frac{1}{c}}, x^{\frac{1}{c}}\right)$, confondus en ce point, se sépareront. Comme $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ varie en croissant à partir de $\left|z_{\nu}^{\frac{1}{c}}\right| < 1$ jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, les z des deux points, primitivement confondus en ν, croissent, et comme $|z|$ est maximum en ν, il en résulte qu'ils ne pourront plus, en se séparant, rester réels, mais ils deviendront imaginaires et conjugués; ils auront donc le même module, et par conséquent les deux affixes correspondants se trouveront d'un même côté du contour $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ aura atteint la valeur 1.

Le point ν ne convient par conséquent pas à la question. Le module commun des deux positions finales reste, comme M. Poincaré l'a montré, inférieur à l'unité.

Le point ν n'étant pas admissible, il en sera de même de ν'. Cela est évident.

Passons au point δ. — Ce point est commun aux courbes (7) et (8). Par conséquent, en faisant varier $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ positivement à partir de $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_{\delta} < 1$ jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, les points confondus en δ se sépareront et suivront : l'un la courbe (7) en se rapprochant de ν $\left(\text{c'est bien le sens croissant car } \nu \text{ est un maximum pour } \left|z^{\frac{1}{c}}\right|\right)$, l'autre la courbe (8) toujours dans le sens indiqué par la variation de $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ ou bien de x.

Il arrivera alors que le premier de ces deux points finira par se confondre avec le point ν, et ses positions finales, au nombre de deux, seront, d'après ce que nous venons de voir, à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$.

L'autre point aura encore sa position finale à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ aura atteint la valeur 1. En effet, si on la suppo-

sait non pas à l'intérieur, mais sur le contour même, c'est-à-dire si l'on prenait la position finale suivante

$$\begin{cases} |x| = 1, \\ y = \dfrac{\alpha(1+\tau^2)}{1-\tau^2} = \alpha > 1, \end{cases}$$

on trouverait pour $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ la valeur

$$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \alpha > 1.$$

Par conséquent, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ aura atteint la valeur 1, la position finale de ce dernier point se trouvera encore à l'intérieur du cercle $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$.

Nous avons ainsi trois positions finales des points primitivement confondus en $\hat{o}$ et toutes trois du même côté du contour d'intégration. Le point $\hat{o}$ et son réciproque ne répondent pas non plus à la question.

15. Il nous reste maintenant à discuter les points γ, ε et μ. Ces derniers points ont, toujours en vertu des hypothèses déjà faites, $x < 0$ et par suite $y < 0$. Il en résulte qu'ils se trouveront situés dans le troisième quadrant, $z^{\frac{1}{c}}$ sera imaginaire et son argument égal à $\left(1 + \frac{a}{c}\right)\pi$, qui sera aussi l'argument de la droite D, le long de laquelle on fera varier $z^{\frac{1}{c}}$. Quant aux affixes respectifs de ces trois points, ils seront, par rapport à l'origine ($x = 0$, $y = 0$), situés dans l'ordre suivant

$$(h) \qquad |\varepsilon| < |\gamma| < |\mu|,$$

donné par l'inégalité

$$|x_\varepsilon| < |x_\gamma| < |x_\mu|.$$

Nous commencerons donc par le point le plus rapproché de l'origine, *par le point* ε. Ce point est de deuxième espèce; son module

sera, comme nous l'avons déjà vu, un maximum ou un minimum. Je dis qu'il est *minimum*. En effet, d'après l'inégalité (h), il est clair que ce module ne pourra qu'augmenter lorsqu'on cheminera vers le point γ, à partir du point ε.

D'autre part il croîtra aussi, si l'on s'approchait de l'origine; car il est facile de s'assurer qu'à l'origine on a $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \infty$, quand on marche dans le sens dont il s'agit [1]. Il en résulte que $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ est bien un minimum pour le point ε.

Cela étant, si nous faisons maintenant décrire à $z^{\frac{1}{c}}$ la droite D, à partir de la valeur $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_{\varepsilon} < 1$ jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, les points confondus en ε se sépareront et resteront réels, parce que les modules des points infiniment voisins de ε sont précisément supérieurs au module de ε. Nous aurons alors des couples de valeurs pour x et y satisfaisant toujours à l'équation $y = \frac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2}$. Un de ces points qui se trouvait déjà à l'intérieur de $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, au moment où il se trouvait confondu en ε avec l'autre, continuera *a fortiori* à y rester, quand il s'approchera de l'origine.

L'autre point cheminant dans le sens contraire finira, à un moment donné, par se confondre avec le point γ, qui se trouve en son chemin en vertu de l'inégalité (h), et ses positions finales seront celles de ce dernier. Il est clair que cela arrivera avant que $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ ait atteint la

---

(1) On a

$$z^{\frac{1}{c}} = y x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} = \frac{\alpha(1+\tau^2)x}{(1-x\tau)^2} x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}$$

ou encore

$$z^{\frac{1}{c}} = \alpha \frac{x^{\frac{a+c}{a}}}{(1-x\tau)^2} e^{a\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)}.$$

Si l'on y fait $x = -\eta$ et si l'on remarque que $\frac{a+c}{a} < 1$ et que, de plus $e^{a\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)}$ reste fini, quand η tend vers zéro, on aura $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \infty$ pour $\eta = 0$.

valeur 1. Continuons donc à faire varier $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ dans le même sens. Les points confondus en γ se sépareront en deux autres, satisfaisant respectivement aux équations (7) et (8), et le sens des deux mouvements sera le suivant :

Le point qui, comme celui qui arrivait de ε, satisfait à l'équation (8) continuera comme ce dernier à s'éloigner de ε, car c'est bien là le sens pour lequel $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ croît. Mais je dis que, tout en s'éloignant ainsi de ε et, par conséquent, de l'origine, il se trouvera encore à l'intérieur du cercle $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ sera arrivé à la valeur finale 1. En effet, si nous faisons $x = -1$ dans

$$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \left|\frac{\alpha(1+\tau^2)}{(1-x\tau)^2} x^{\frac{a+c}{a}} e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}\right|,$$

on trouve

$$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \alpha \frac{1+\tau^2}{(1+\tau)^2} > 1.$$

Donc, la valeur finale de x sera inférieure à -1 et le point correspondant sera à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$.

L'autre point, qui se trouvait primitivement en γ, satisfait à l'équation $y = \frac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)x}$. Pour que son module augmente, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ tend vers l'unité, il faut que $x = -\eta$ tende vers zéro avec η. Nous aurons donc pour x une valeur très petite, tendant vers zéro, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ tendra vers l'unité ; il en résulte que la position finale de ce dernier point sera encore à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right|$.

En résumé, nous avons : deux positions finales pour γ et toutes deux du même côté du contour d'intégration ; le point γ et son réciproque ne sont pas admissibles ; nous avons, en outre, une troisième position finale appartenant à ε, qui, avec les deux précédentes, constitue les positions finales des points primitivement confondus en ε et toutes à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$.

Le point ε et son réciproque sont aussi inadmissibles.

Il nous reste un dernier point, *le point* μ. Remarquons que si l'on faisait continuer $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$, comme nous l'avons fait pour ε, en partant d'une des valeurs $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_\varepsilon$ ou bien $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_\gamma$, nous ne tomberions pas sur le point μ.

Cela résulte de la discussion, que nous venons de faire, sur le sens du mouvement des points primitivement confondus en ε ou bien en γ. Il en résulte que les positions finales, que nous allons trouver pour le point μ, n'appartiendront pas, à la fois, à un autre point, comme c'était le cas pour γ et ε. Ces positions finales décideront donc de l'admissibilité ou de la non-admissibilité du point μ seulement.

Cette remarque préliminaire faite, voyons, maintenant, quelles sont ces positions finales.

Le point μ de deuxième espèce est encore un minimum pour son module. Il est facile de s'en rendre compte. Si nous faisons alors varier $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ à partir de la valeur $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_\mu < 1$ jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, les points confondus en ce point se sépareront, en restant réels. Ils continueront donc à vérifier l'équation (7), en s'éloignant d'un côté et de l'autre du point μ. L'un des points $\left(\text{celui pour lequel } \left|x^{\frac{1}{c}}\right| \text{ diminue}\right)$ ira, évidemment, se confondre avec le point γ; il aura alors deux positions finales à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. L'autre point, dont le $|x|$ augmente, finira par avoir une position finale extérieure au cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. En effet, faisons $x = -1$ dans

$$z^{\frac{1}{c}} = \frac{(x-\tau)^2}{\alpha(1+\tau^2)} x^{\frac{a}{c}-1} e^{\frac{a\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}.$$

D'où :

$$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Par conséquent, $\left|x^{\frac{1}{c}}\right|$ aura dépassé la valeur 1, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ aura à peine atteint cette même valeur. La position finale de ce dernier point se trouvera ainsi à l'extérieur du contour d'intégration, et comme la position finale de l'autre point est à l'intérieur, il en résulte que le point μ et son réciproque répondent à la question.

Les points μ et μ' sont donc les véritables points singuliers de $\Phi(x)$.

En désignant par $|\mu|$ et par $|\mu'| = \frac{1}{|\mu|}$ les modules respectifs des deux affixes, $|\mu|$ sera le rayon du cercle intérieur de convergence et $|\mu'|$ le rayon limite du cercle extérieur. La fonction $\Phi(z)$ sera holomorphe dans toute la couronne limitée par les deux cercles et se développera en série de Laurent (I).

Les valeurs des rayons $|\mu|$ et $|\mu'|$ se déduiront de l'expression, bien connue, de z

$$z = y^c x^a e^{a\tau\left(\frac{1}{x} - x\right)},$$

dans laquelle on aura remplacé x et y par les valeurs respectives aux points μ et μ' (Tableau A).

Remarque. — En réalité, le point μ n'est pas le seul point singulier de $\Phi(z)$ à l'intérieur du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. Je dis qu'il y en a encore $c - 1$ autres et de même module que le précédent.

En effet, la fonction $F\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right)$ est regardée comme fonction, non pas de x, mais de $x^{\frac{1}{c}}$ et comme telle elle sera multipliée par une racine $c^{\text{ième}}$ de l'unité, quand $x^{\frac{1}{c}}$ sera multiplié par une même racine. Elle admettra donc non seulement le point μ, comme singulier, mais tous les points contenus dans le cycle suivant :

$$X' = Xe^{\frac{2ki\pi}{c}} \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (c-1)],$$

X désignant la valeur de $x^{\frac{1}{c}}$, au point μ, dont $\frac{\pi}{c}$ est l'argument (l'argument de x étant π en ce point).

Cette relation nous conduit, évidemment, à l'égalité suivante

$$|X'| = \left|Xe^{\frac{2ki\pi}{c}}\right| = |X| \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, (c-1)],$$

qui montre bien que les modules respectifs des positions finales des points primitivement confondus en un point quelconque du cycle sont respectivement égaux aux modules correspondant aux positions

finales des points primitivement confondus en μ. Il en résulte que les $c-1$ points du cycle seront, avec le point μ, admissibles.

De plus, il est clair que tous ces $c-1$ points auront, en vertu de l'égalité précédente, un module commun, le module du point μ. Nous aurons, par conséquent, c points situés sur la circonférence intérieure et il en sera évidemment de même de leurs réciproques.

III.

14. Pour appliquer le théorème de M. Darboux, généralisé par M. Flamme, il nous reste à chercher la forme des fonctions $\Phi_\mu(z)$ et $\Phi_{\mu'}(z)$ [I, n° **7**].

$\Phi(z)$ est défini par l'expression suivante :

$$(1)\quad \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left|x^{\frac{1}{c}}\right|=1} F\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right) x^{\frac{1}{c}} e^{\frac{\tau}{c(1+\tau^2)}\left(\frac{1}{x}-x\right)} \frac{(x-\tau)(1-x\tau)}{c(1+\tau^2)x^2}\,dx,$$

et si l'on y remplace $F\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right)$ par son expression

$$(2)\qquad F\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right) = \frac{t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}}}{\sqrt{\Delta}} = \frac{x^{\frac{ad-bc}{c}} e^{\frac{ad-bc}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} z^{-\frac{d}{c}}}{x^{\frac{1}{c}} e^{\frac{1}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)}\sqrt{\Delta}},$$

on trouve

$$(3)\quad \Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\left|x^{\frac{1}{c}}\right|=1} \frac{(x-\tau)(1-x\tau)}{cx^2} x^{\frac{ad-bc}{c}} e^{\frac{ad-cb}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} z^{-\frac{d}{c}} \frac{dx}{\sqrt{\Delta}}.$$

Le seul facteur qui cesse d'être holomorphe aux points μ' ou μ est la fonction $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Pour avoir sa forme en ce point, dont nous désignerons par x_0, z_0 les coordonnées, il suffira de se rappeler comment le point μ' a été obtenu.

Le point μ' est de deuxième espèce, et satisfait aux équations

$$\begin{cases} \Delta = 0, \\ \dfrac{d\Delta}{dx} = 0, \qquad \dfrac{d\Delta}{dz} \neq 0. \end{cases}$$

Il en résulte que le développement de Δ en série de $x - x_0$, $z - z_0$ commencera par un terme en $(x - x_0)^2$ indépendant de $z - z_0$ et par le terme $z - z_0$, quand on fera $x = x_0$ dans ce même développement. Dans ces conditions, Δ pourra toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta = [(x - v)^2 + w]\,\Psi(x, z), \tag{4}$$

où l'on a désigné par v et w respectivement deux séries en $z - z_0$ de la forme

$$\left\{\begin{aligned} v &= x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v^{(n)}(z - z_0)^n, \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} w^{(n)}(z - z_0)^n, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

v se réduisant à x_0 pour $z = z_0$, et w s'annulant pour la même valeur. Quant à $\Psi(x, z)$, c'est une fonction finie même au point $x = x_0$, $z = z_0$.

Si nous posons alors

$$\left\{\begin{aligned} \chi(x, z) &= \frac{1}{\sqrt{\Psi(x, z)}}; \\ \varphi(x, z) &= \chi(x, z)\,\frac{(x - \tau)(1 - x\tau)}{x^2}\, x^{\frac{ad-bc}{c}}\, e^{\frac{ad-bc}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x} - x\right)}\, z^{-\frac{d}{c}}, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

l'expression (3) de $\Phi(z)$ deviendra la suivante :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi c}\int_{\left|x^{\frac{1}{c}}\right|=1} \frac{\varphi(x, z)\,dx}{\sqrt{(x - v)^2 + w}}, \tag{7}$$

$\varphi(x, z)$ étant holomorphe au point $x = x_0$, $z = z_0$.

15. Cela posé, remplaçons le contour $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ par un autre plus grand, obtenu en déformant le premier. Le premier point singulier que nous rencontrerons dans notre chemin sera le point

$$\mu'(x = x_0, z = z_0).$$

Quand z aura une valeur très voisine de z_0, x aura deux valeurs $x_1^{\frac{1}{c}}$ et $x_2^{\frac{1}{c}}$ voisines de $x_0^{\frac{1}{c}}$ et le nouveau contour d'intégration passera évidemment entre les deux points qui iront se confondre en μ', quand z prendra la valeur z_0.

Le contour passera de même, en vertu de la remarque établie plus haut (II, **13**), entre les points des $c-1$ couples suivants

$$jx_1^{\frac{1}{c}} \quad \text{et} \quad jx_2^{\frac{1}{c}}, \qquad j^2x_1^{\frac{1}{c}} \quad \text{et} \quad j^2x_2^{\frac{1}{c}}, \qquad \ldots, \qquad j^{c-1}x_1^{\frac{1}{c}} \quad \text{et} \quad j^{c-1}x_2^{\frac{1}{c}},$$

où l'on a posé $j^k = e^{\frac{2ki\pi}{c}}$.

La fonction $\Phi(z)$ sera alors définie par l'intégrale précédente prise le long de ce nouveau contour Γ.

Nous pouvons même séparer le contour Γ en c arcs $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{c-1}$ passant respectivement entre les points des couples précédents. Si nous désignons alors, pour abréger, par $H\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right)$ la fonction sous le signe $\int$, on aura, pour $\Phi(z)$, l'expression qui suit :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi c}\left[\int_{\Gamma_0} H\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right)dx + \int_{\Gamma_1} H\left(x^{\frac{1}{c}}j, z^{\frac{1}{c}}\right)j\,dx \right.$$
$$\left. + \int_{\Gamma_2} H\left(x^{\frac{1}{c}}j^2, z^{\frac{1}{c}}\right)j^2dx + \ldots + \int_{\Gamma_{c-1}} H\left(x^{\frac{1}{c}}j^{c-1}, z^{\frac{1}{c}}\right)j^{c-1}dx\right].$$

Or, on a

$$H\left(x^{\frac{1}{c}}j^k, z^{\frac{1}{c}}\right) = j^{-k}H\left(x^{\frac{1}{c}}, z^{\frac{1}{c}}\right);$$

la somme précédente deviendra donc une somme de c intégrales égales et, par suite,

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{\varphi(x, z)\,dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}}.$$

Le contour Γ_0 ayant une longueur finie, l'intégrale sera holomorphe le long de cet arc, sauf dans le voisinage du point $x = x_0$, $z = z_0$. Nous pouvons alors séparer, dans cette intégrale, la partie non holomorphe de la partie holomorphe, en décomposant à son tour l'arc Γ_0 en trois

autres : $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ et $\gamma\delta$. Nous aurons ainsi une somme de trois intégrales dont deux, la première et la troisième, seront holomorphes dans tout le plan et même au point (x_0, z_0). En appelant $\Phi_1(z)$ leur somme, on aura pour $\Phi(z)$, l'expression

$$(8) \qquad \Phi(z) = \Phi_1(z) + \frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\int_\beta^\gamma \frac{\varphi(x, z)\,dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}},$$

β et γ étant supposées assez petites pour que l'intégrale, une fois effectuée, nous donne une fonction qui converge pour ces valeurs de x; nous les supposerons cependant finies par rapport à $z - z_0$ (z étant très voisin de z_0) et indépendantes de la variation de cette dernière.

16. Par sa définition (6), la fonction $\varphi(z, x)$ est évidemment holomorphe au point μ'; elle sera donc développable en une série de la forme

$$(9) \quad \varphi(x, z) = \varphi_0 + \varphi_1(x-v) + \varphi_2(x-v)^2 + \ldots + \varphi_n(x-v)^n + \ldots,$$

les coefficients $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions de z.

Si nous remplaçons son développement dans l'expression de $\Phi(z)$, on obtient

$$(10) \qquad \Phi(z) = \Phi_1(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{2\sqrt{-1}\pi}\int_\beta^\gamma \frac{(x-v)^n\,dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}}.$$

Remarquons que, si n est impair, l'intégrale $\int_\beta^\gamma \frac{(x-v)^n\,dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}}$ se ramène à la suivante :

$$\int_\beta^\gamma \frac{(x-v)\,dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}} = \left[\sqrt{(x-v)^2+w}\right]_\beta^\gamma = \text{fonct. holomorphe en } z.$$

Nous ne considérerons donc que les termes d'ordre pair, les seuls qui conduisent à une fonction non holomorphe en z et c'est précisément cette partie dans $\Phi(z)$, que nous avons désignée par $\Phi\mu'(z)$, que nous cherchons.

En supposant n pair, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
J_n &= g_n(z) - \frac{n-1}{n} w J_{n-1},\\
J_{n-2} &= g_{n-2}(z) - \frac{n-3}{n-2} w J_{n-3},\\
J_{n-4} &= g_{n-4}(z) - \frac{n-5}{n-4} w J_{n-5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
J_4 &= g_4(z) - \frac{3}{4} w J_2,\\
J_2 &= g_2(z) - \frac{1}{2} w J_0,
\end{aligned}$$

en désignant par J_k l'intégrale dans Σ de $\Phi(z)$, qui correspond au terme d'ordre k dans le développement de $\varphi(x, z)$.

Des relations précédentes, on tire

$$\begin{aligned}
J_n = g_n &+ (-w)\frac{n-1}{n} g_{n-2}\\
&+ (-w^2)\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} g_{n-4} + \ldots + (-w)^{\frac{n}{2}}\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 2} J_0,
\end{aligned}$$

exprimée en fonction de J_0.

Or on a

$$J_0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\int_\beta^\gamma \frac{dx}{\sqrt{(x-v)^2+w}} = \frac{1}{2i\pi}\left[\log(x-v) + \sqrt{(x-v)^2+w}\right]_\beta^\gamma,$$

ou bien

$$2\sqrt{-1}\,\pi J_0 = \log\frac{\gamma - v + \sqrt{(\gamma-v)^2+w}}{\beta - v + \sqrt{(\beta-v)^2+w}}.$$

L'expression précédente de J_0 contient encore une partie finie et la partie non holomorphe. Pour les séparer remarquons que, β étant la limite inférieure d'intégration, le dénominateur s'annule pour $z = z_0$. On pourra alors multiplier les deux termes par la conjuguée de

celui-ci et les deux parties seront séparées. On a ainsi

$$\log\left[\gamma - c + \sqrt{(\gamma - c)^2 + \varpi}\right]\left[-(\beta - c) + \sqrt{(\beta - c)^2 + \varpi}\right] - \log\varpi,$$

dont le premier terme reste fini, $\log\varpi$ cessant au contraire d'être holomorphe en z pour $z = z_0$.

On peut écrire encore, comme il suit, le second terme, en vertu de l'expression (5) de ϖ,

$$\begin{aligned}\log\varpi &= \log(z - z_0)[\varpi_0 + \varpi_1(z - z_0) + \ldots] \\ &= \log(z - z_0) + \log[\varpi_0 + \varpi_1(z - z_0) + \ldots],\end{aligned}$$

le second logarithme étant fini pour $z = z_0$, car $\varpi_0 \neq 0$ au point μ'.

L'expression finale de J_0 sera par conséquent

$$J_0 = g_0(z) - \frac{1}{2i\pi}\log(z - z_0).$$

On en déduira l'expression finale de J_n et par conséquent celle de $\Phi(z)$, qui sera la suivante

$$\text{(11)} \qquad \Phi(z) = \Psi(z) + G(z)\log(z - z_0),$$

$\Psi(z)$ désignant la somme de toutes les fonctions telles que $g_k(z)$ finies pour $z - z_0$ et $G(z)$ désignant ce qui suit

$$\text{(11)} \qquad G(z) = \sum \frac{-1}{2\sqrt{-1}\,\pi}\,\frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 2}(-\varpi)^{\frac{n}{2}}\varphi_n(z);$$

$\Psi(z)$ et $G(z)$ seront, par conséquent, holomorphes en z même au point μ'.

Quant à la partie non holomorphe cherchée $\Phi_{\mu'}(z)$, son expression sera

$$\text{(12)} \qquad \Phi_{\mu'}(z) = G(z)\log(z - z_0).$$

C'est le coefficient du terme d'ordre n, dans ce dernier développement, qui nous donnera, d'après le théorème de M. Darboux, la

valeur approchée du coefficient a_n dans le développement de $\Phi(z)$ et, par conséquent, la valeur de $C_{m,m'}$ dans le développement de la fonction perturbatrice (I, 4).

Formons ce coefficient. On a d'abord

$$G(z) = \frac{-1}{2\sqrt{-1}\pi}\left[\varphi_0 + \frac{1}{2}(-w)\varphi_2 + \frac{1.3}{2.4}(-w)^2\varphi_4 + \ldots\right],$$

et

$$\varphi_0(z) = \varphi_{0,0} + \varphi_{0,1}(z - z_0) + \varphi_{0,2}(z - z_0)^2 + \ldots;$$

il en résulte pour $G(z)$ une série de la forme

$$G(z) = \frac{-\varphi_{0,0}}{2\sqrt{-1}\pi} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} p^{(\nu)} z^\nu.$$

D'autre part, $\log(z - z_0)$ se développera, en série convergente de z, à l'intérieur du cercle de rayon $|\mu'|$, sous la forme

$$\log(z - z_0) = \sum_{S=0}^{\infty} q^{S)} z^S,$$

et le coefficient de z^n dans ce développement est évidemment $-\frac{1}{n z_0^n}$.

On aura finalement, pour valeur approchée de $C_{m,m'}$, l'expression suivante :

$$C_{m,m'} = \frac{1}{2i\pi}\frac{\varphi_{0,0}}{z_0^n}\frac{1}{n}(1 + \varepsilon), \tag{13}$$

ε étant très petit pour des valeurs très grandes de n. Dans les applications, le premier terme de la série $\frac{1+\varepsilon}{n}$ sera grandement suffisant. En effet, ce qu'on veut savoir, c'est seulement de se rendre compte du degré d'importance de $C_{m,m'}$, c'est-à-dire de l'inégalité à longue période correspondante.

17. Il nous faut maintenant calculer $\varphi_{0,0}$. C'est la valeur que l'on obtient, en remplaçant x et z par les coordonnées x_0 et y_0 de μ' dans l'expression (6) de $\varphi(x, z)$.

On tire des relations (6) et (4)

$$\varphi_{0,0} = \frac{(x_0 - \tau)(1 - x_0\tau)}{x_0^2} x_0^{\frac{ad-bc}{c}} e^{\frac{ad-bc}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x_0} - x_0\right)} y_0^{-d} x_0^{-\frac{ad}{c}} e^{-\frac{ad}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x_0} - x_0\right)} \left[\frac{\sqrt{(x-v)^2 + w}}{\sqrt{\Delta}}\right]_{0,0},$$

ou bien

$$\varphi_{0,0} = \frac{(x_0 - \tau)(1 - x_0\tau)}{x_0^2} x_0^{-b} y_0^{-d} e^{-\frac{b\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x_0} - x_0\right)} \left[\frac{\sqrt{(x-v)^2 + w}}{\sqrt{\Delta}}\right]_{0,0}.$$

Le dernier facteur se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ au point (x_0, y_0). Or, on a

$$\lim \left[\frac{\sqrt{(x-v)^2 + w}}{\sqrt{\Delta}}\right]_{0,0} = \lim \left[\frac{\dfrac{x - v}{\sqrt{(x-v)^2 + w}}}{\dfrac{D_x\Delta}{2\sqrt{\Delta}}}\right]_{0,0}$$

$$= 2 \lim \left(\frac{x - v}{D_x\Delta}\right)_{0,0} \lim \frac{1}{\left[\dfrac{\sqrt{(x-v)^2 + w}}{\sqrt{\Delta}}\right]_{0,0}},$$

On en tire

$$\lim \left[\frac{\sqrt{(x-v)^2 + w}}{\sqrt{\Delta}}\right]_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} D_x^2 \Delta_{0,0}}},$$

et l'expression (13) deviendra

$$(14) \qquad C_{m,m'} = \frac{1 + \varepsilon}{2\sqrt{-1}\,\pi n} \frac{(x_0 - \tau)(1 - x_0\tau)}{x_0^2 x_0^m y_0^{m'} e^{m\tau\left(\frac{1}{x_0} - x^0\right)}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} D_x^2 \Delta_{0,0}}}.$$

Nous avons vu (II, 9) que l'on a pour Δ

$$\Delta = L^4 E E_0.$$

Le point $\mu'(x = x_0, y = y_0)$ satisfaisant aux équations

$$E_0 = \frac{dE_0}{dx} = 0,$$

il en résulte

$$D_x^2 \Delta = L^4 (E D_x^2 E_0)$$

et, par conséquent,

$$(15)\qquad C_{m,m'} = \frac{1+\varepsilon}{2\pi\sqrt{-1}\,u}\,\frac{(x_0-\tau)(1-x_0\tau)}{x_0^2 x_0^m y_0^{m'} e^{m\tau\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)}}\,\frac{\sqrt{2}}{L^2\sqrt{(ED_x^2E_0)_{0,0}}}.$$

Calcul de $(ED_x^2E_0)_{0,0}$. — On a

$$E_0 = \cos u - \sin\varphi - i\cos\varphi\sin u - \alpha(\cos u' - i\sin u'),$$

$$\frac{dE_0}{dx} = -\sin u\frac{du}{dx} - i\cos\varphi\cos u\frac{du}{dx} - \alpha\left(-\sin u'\frac{du'}{dx} - i\cos u'\frac{du'}{dx}\right)$$

$$= -\left[(\sin u + i\cos\varphi\cos u)\frac{du}{dx} - \alpha(\sin u' + i\cos u')\frac{du'}{dx}\right],$$

$$\frac{d^2E_0}{dx^2} = -\Big[(\cos u - i\cos\varphi\sin u)\frac{du^2}{dx^2} - \alpha(\cos u' - i\sin u')\frac{du'^2}{dx^2}$$

$$+ (\sin u + i\cos\varphi\cos u)\frac{d^2u}{dx^2} - \alpha(\sin u' + i\cos u')\frac{d^2u'}{dx^2}\Big].$$

En vertu des relations

$$\cos u = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right),\qquad \cos u' = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right),$$

$$i\sin u = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right),\qquad i\sin u' = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right),\qquad y = z^{\frac{1}{c}}x^{-\frac{a}{c}}e^{-\frac{a\tau}{c}\left(\frac{1}{x}-x\right)}.$$

on trouve

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{ix},\qquad \frac{du'}{dy} = \frac{1}{iy},\qquad \frac{du'}{dx} = \frac{a}{icx^2}\left[\frac{\sin\varphi}{2}(x^2+1) - x^2\right].$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{1}{ix^2},\qquad \frac{d^2u'}{dy^2} = -\frac{1}{iy^2},\qquad \frac{d^2u'}{dx^2} = -\frac{\sin\varphi}{2}\frac{2a}{cix^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay}{cx^2}\left[\frac{\sin\varphi}{2}(x^2+1) - x^2\right],$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ay}{cx}\left\{\frac{a}{cx^3}\left[\frac{\sin\varphi}{2}(x^2+1) - x^2\right]^2\right.$$

$$\left. - \frac{2}{x^2}\left[\frac{\sin\varphi}{2}(x^2+1) - x^2\right] + 2\left(\frac{\sin\varphi}{2} - 1\right)\right\}$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} = -\left\{\frac{-1}{2x^2}\left[\left(x+\frac{1}{x}\right) - \cos\varphi\left(x-\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{\alpha a^2}{c^2 y x^4}\left[\frac{\sin\varphi}{2}(x^2+1) - x^2\right]^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2x^2}\left[\left(x-\frac{1}{x}\right) - \cos\varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] + \frac{\alpha\sin\varphi}{2}\,\frac{2c}{ayx^2}\right\}$$

ou bien

$$\frac{d^2 E_0}{dx^2} = -\frac{1}{2x^3}\left\{-\left[(x^2+1)(1+\tau^2) - (x^2-1)\right]\right.$$
$$+ \frac{2\alpha a^2}{c^2 x y}\left[\tau(x^2+1) - x^2(1+\tau^2)\right]^2$$
$$\left. + \left[(x^2-1)(1+\tau^2) - (x^2+1)\right] + 4\alpha\tau\frac{c}{a}\,\frac{x}{y}\right\}.$$

On a, d'autre part

$$E = \cos u - \sin\varphi + i\cos\varphi\sin u - \alpha(\cos u' + i\sin u')$$

ou bien

$$E = \frac{1}{2x}\left[(x^2+1)(1+\tau^2) - 4\tau x + (x^2-1) - 2\alpha(1+\tau^2)xy\right].$$

Posons

$$(16)\quad P(x_0, y_0) = \frac{(x_0-\tau)(1-x_0\tau)x_0^{-m}y_0^{-m'}e^{-m\tau\left(\frac{1}{x_0}-x_0\right)}}{\sqrt{\left[(x_0^2+1)(1+\tau^2) - 4\tau x_0 + (x_0^2-1) - 2\alpha(1+\tau^2)x_0y_0\right]}}$$
$$\times\left\{\begin{array}{l} -\left[(x_0^2+1)(1+\tau^2) - (x_0^2-1)\right] \\ + \dfrac{2\alpha a^2}{c^2 x_0 y_0}\left[(x_0^2+1)\tau - (1+\tau^2)x_0^2\right]^2 \\ + \left[(x_0^2-1)(1+\tau^2) - (x_0^2+1)\right] + 4\tau\alpha\dfrac{c x_0}{a y_0} \end{array}\right\}$$

en désignant toujours par x_0, y_0 les coordonnées du point μ', à savoir

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{-(c-2a)+\sqrt{c(c-8a)}}{2a\tau}, \\ y_0 = -\alpha\dfrac{c+4a+\sqrt{c(c-8a)}}{8c\tau}; \end{array}\right. \qquad (\mu')$$

l'expression cherchée de $C_{m,m'}$ deviendra finalement

$$\text{(III)} \qquad C_{m,m'} = \frac{\sqrt{2}}{L^2\pi}\,\frac{1}{n}\,P(x_0, y_0)(1+\varepsilon),$$

L^2 étant le demi-grand axe de la planète intérieure et α le rapport $L'^2 L^{-2} > 1$ des demi-grands axes.

18. L'expression (III) de $C_{m,m'}$ se présente avec un double signe à cause des deux déterminations du radical. Il s'agit de voir quel est le signe qu'il faudra prendre.

Pour cela, examinons ce qui va se passer pour des valeurs particulières de x et de y. Prenons, par exemple, $x = 1$ et $y = 1$; cela veut dire que les deux anomalies excentriques sont supposées réelles; elles définiront alors deux points réels, deux planètes P et P', situées dans les orbites respectives. Le radical représentera la distance des deux planètes, quantité réelle et *positive*.

En faisant maintenant varier x et y d'une façon continue jusqu'aux valeurs x_0, y_0, qui correspondent au point μ', le radical restera fini dans l'intervalle et variera d'une façon continue. Donc, on arrivera au point μ' avec la détermination positive avec laquelle on était parti. Le signe, qu'il faudra prendre, sera le signe $+$.

Remarque I. — On a, pour préciser, supposé $c > 0$, $a < 0$, $\alpha > 1$. Les conclusions seront encore les mêmes avec d'autres hypothèses sur ces nombres. Les points singuliers admissibles seront encore μ et μ' et leurs coordonnées seront réelles pourvu que $\frac{c}{a} < 0$: c'est ce qui a lieu dans le cas des inégalités à longue période.

Le cas de $\tau = 0$, $\tau' \neq 0$ et petit se déduira du précédent en permutant entre elles, dans l'expression (III) de $C_{m,m}$, les quantités τ et τ', c et a, α et $\frac{1}{\alpha}$, x_0 et y_0.

Remarque II. — Pour passer de la valeur de $C_{m,m'}$ aux valeurs des coefficients de $\cos(ml + m'l')$ et de $\sin(ml + m'l')$ dans le développement de F_1^0 sous la forme habituelle

$$F_1^0(l, l') = \sum_{m,m'} A_{m,m'} \cos(ml + m'l') + \sum_{m,m} B_{m,m} \sin(ml + m'l'),$$

on a les relations évidentes

$$A_{m,m'} - \sqrt{-1}\, B_{m,m'} = 2\, C_{m,m},$$

$$A_{m,m'} + \sqrt{-1}\, B_{m,m'} = 2\, C_{-m,-m'},$$

$C_{-m,-m'}$ étant le coefficient de l'exponentielle conjuguée.

IV.

19. Nous allons aborder maintenant le cas plus général où aucune des excentricités, toujours supposées petites, n'est nulle.

On restera encore dans le plan.

Les équations algébriques à résoudre sont données par le système (5) (n° **10**); d'autres points singuliers, outre ceux déjà trouvés, s'introduiront et les calculs deviendront plus longs. Mais, ce n'est là qu'une difficulté secondaire.

La vraie difficulté, qui surgit dans le cas présent, tient à ce que z étant donné par la relation

$$(\alpha) \qquad z = x^a e^{\frac{a \sin \varphi}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)} y^c e^{\frac{c \sin \varphi'}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right)},$$

où φ' n'est plus nul, y et, par conséquent, $F(z, t)$ ne sera plus *uniforme* en $x^{\frac{1}{c}}$ et $z^{\frac{1}{c}}$, comme cela arrivait dans le cas précédent [II, n° **11**]. La discussion de l'*admissibilité* des points singuliers trouvés, ne pourra plus se faire dans un plan $\left(\text{le plan des } x^{\frac{1}{c}}, \text{ dans le cas traité}\right)$, mais sur une surface, composée de feuillets en nombre égal au nombre de déterminations de $F(z, t)$ et telle que chacun de ses points soit défini par un système de valeurs x et y, déduit de l'équation (α), dans laquelle on aura regardé z comme constant.

On est ainsi conduit à la considération de la surface de Riemann, correspondante à $F(z, t)$, sur laquelle il faudra varier t. La discussion devient ainsi bien plus difficile que dans le cas précédemment traité.

20. Les équations algébriques (5) [II, n° **10**], qu'il s'agit de ré-

soudre, peuvent s'écrire comme il suit :

$$(1)\qquad (x-\tau)(1-x\tau)=0,$$

$$(2)\qquad (y-\tau')(1-y\tau')=0,$$

$$(3)\qquad \frac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta x\,\frac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2}=0,$$

$$(4)\qquad \frac{y(1-x\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta_0 x\,\frac{(1-y\tau')^2}{1+\tau'^2}=0,$$

$$(5)\qquad \frac{c(x+\tau)}{1-x\tau}+a\beta\,\frac{(y+\tau')}{1-y\tau'}=0,$$

$$(6)\qquad \frac{c(1+x\tau)}{(x-\tau)}+a\beta_0\,\frac{(1+\tau'y)}{y-\tau'}=0.$$

En combinant deux à deux ces équations, comme on l'a fait dans le cas précédent, on aura deux sortes de points singuliers, savoir :

Points singuliers de première espèce, obtenus par les combinaisons suivantes :

$$\begin{cases} (1)\quad (x-\tau)(1-x\tau)=0, \\ (2)\quad (y-\tau')(1-y\tau')=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1)\quad (x-\tau)(1-x\tau)=0, \\ (3)\quad \dfrac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta x\,\dfrac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2)\quad (y-\tau')(1-y\tau')=0, \\ (3)\quad \dfrac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta x\,\dfrac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3)\quad \dfrac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta x\,\dfrac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2}=0, \\ (4)\quad \dfrac{y(1-x\tau)^2}{1+\tau^2}-\beta_0 x\,\dfrac{(1-y\tau')^2}{1+\tau'^2}=0. \end{cases}$$

Remarque. — Les combinaisons (1) et (4), (2) et (4) donneront évidemment les points *réciproques* des points déduits respectivement des groupes (1) et (3), (2) et (3), et où l'on aura changé β en β_0.

Points singuliers de deuxième espèce. — Ils sont définis par les groupes réciproques suivants :

$$(3)\qquad \left\{ \frac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2} - \beta x \frac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2} = 0, \right.$$

$$(5)\qquad \left\{ \frac{c(x+\tau)}{1-x\tau^2} + a\beta \frac{y+\tau'}{1-y\tau'} = 0, \right.$$

$$(4)\qquad \left\{ \frac{y(1-x\tau)^2}{1+\tau^2} - \beta_0 x \frac{(1-y\tau')^2}{1+\tau'^2} = 0, \right.$$

$$(6)\qquad \left\{ \frac{c(1+x\tau)}{x-\tau} + a\beta_0 \frac{1+y\tau'}{y-\tau'} = 0. \right.$$

Ici aussi, les points du second groupe seront respectivement réciproques à ceux du premier, à la condition de changer β en β_0 dans ces derniers.

21. Les équations (1) et (2) donnent les points suivants

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \tau \\ y = \tau' \end{array} \right. \qquad \text{et son réciproque} \qquad (\alpha')\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \frac{1}{\tau'}, \end{array} \right.$$

$$(\sigma)\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \tau \\ y = \frac{1}{\tau'} \end{array} \right. \qquad \text{»} \qquad (\sigma')\quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \tau'. \end{array} \right.$$

le premier correspondant au point (α) du Tableau A; le second (σ) étant un point singulier nouveau.

Considérons le groupe (1, 3). Il est d'abord satisfait par le point $\alpha(x = \tau, y = \tau')$, qui est *double* pour (3).

En prenant l'autre valeur de x, $x = \frac{1}{\tau}$ et en substituant dans (3), on obtient l'équation

$$(a)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta\tau(1+\tau^2)y^2 \\ \quad -[(1+\tau'^2)(1-2\tau^2) + 2\beta\tau\tau'(1+\tau^2)]y \\ \qquad\qquad + \beta\tau\tau'^2(1+\tau^2) = 0 \end{array} \right.$$

qui est satisfaite, d'une façon approchée, par la racine très grande

$$y = \frac{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta\tau\tau'}{\beta\tau} = \frac{1}{\beta\tau}$$

d'abord, et ensuite par la racine très petite

$$y = \frac{\beta\tau\tau'^2}{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta\tau\tau'} = \beta\tau\tau'^2$$

(si l'on néglige les très petites quantités).

Nous aurons donc deux points singuliers : l'un

$$(\beta') \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \frac{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta\tau\tau'}{\beta\tau} = \frac{1}{\beta\tau}, \end{cases}$$

correspondant au point β' du Tableau A ; l'autre

$$(\zeta') \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \frac{\beta\tau}{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta\tau\tau'} = \beta\tau\tau'^2, \end{cases}$$

ne figurant pas dans le Tableau A, est un nouveau point singulier.

Le groupe (1, 4) conduira à l'équation réciproque de (a) et par conséquent aux points réciproques des précédents ; savoir

$$(\beta) \qquad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \frac{\beta_0\tau}{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta_0\tau\tau'} = \beta_0\tau \end{cases}$$

et

$$(\zeta) \qquad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \frac{1 + \tau'^2 - 2\tau^2 + 2\beta_0\tau\tau'}{\beta_0\tau\tau'^2} = \frac{1}{\beta_0\tau\tau'^2}. \end{cases}$$

Quant aux points singuliers définis par les groupes (2, 3) et (2, 4), on les déduit des précédents en y permutant, tout simplement, les

coordonnées x et y entre elles et aussi les quantités τ et τ'; on prendra, en outre, l'inverse des quantités β et β_0.

La raison en est simple. On aura de cette façon les points singuliers suivants

$$(v') \quad \begin{cases} y = \frac{1}{\tau'}, \\ x = \frac{\beta(1+\tau^2-2\tau'^2)+2\tau\tau'}{\tau'} = \frac{\beta}{\tau'} \quad \text{(d'une façon approchée)}, \end{cases}$$

$$(w) \quad \begin{cases} y = \frac{1}{\tau'}, \\ x = \frac{\tau'}{\beta(1+\tau^2-2\tau'^2)+2\tau\tau'} = \frac{\tau'}{\beta} \end{cases}$$

et les réciproques respectifs

$$(\alpha') \quad \begin{cases} y = \tau', \\ x = \frac{\beta_0(1+\tau^2-2\tau'^2)+2\tau\tau'}{\tau'} = \frac{\beta_0}{\tau'}, \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} y = \tau', \\ x = \frac{\tau'}{\beta_0(1+\tau^2-2\tau'^2)+2\tau\tau'} = \frac{\tau'}{\beta_0}. \end{cases}$$

Les combinaisons d'équations (1, 3), (1, 4), (2, 3) et (2, 4) introduisent donc dans le cas présent trois points singuliers nouveaux : (ζ), (v) et (w) et leurs réciproques respectifs. Ces trois points ont été obtenus de la même façon que (β) et nous avons vu (II, n° **12**) que ce dernier n'est singulier qu'en apparence pour $\Phi(z)$. Il en est de même des points ζ, v et w. D'abord le point ζ est évidemment, pour la même raison que β, singulier apparent seulement.

Cela résulte de la forme de l'expression $\Phi(z)$ (*loc. cit.*).

Si nous changeons maintenant x en y, τ en τ' dans cette même expression de $\Phi(z)$, nous prouverons par cela même que $y = \tau'$ ou $\frac{1}{\tau'}$ et par conséquent les points eux-mêmes v, w, v', w' ne s'introduisent qu'en apparence comme points singuliers de $\Phi(z)$.

Nous n'avons donc pas à en tenir compte.

Il ne nous reste plus, comme points singuliers de première espèce, que ceux qui résultent des équations (3) et (4).

Ces équations devant être satisfaites à la fois, il en sera de même de l'équation

$$\frac{y^2(x-\tau)^2(1-x\tau)^2}{(1+\tau^2)^2} = \beta\beta_0 \frac{x^2(y-\tau')^2(1-y\tau')^2}{(1+\tau'^2)^2},$$

ou bien des deux suivantes :

$$(b) \qquad \frac{y(x-\tau)(1-x\tau)}{1+\tau^2} = \pm\alpha \frac{x(y-\tau')(1-y\tau')}{1+\tau'^2},$$

en posant toujours

$$(c) \qquad \alpha = L'^2 L^{-2} = \sqrt{\beta\beta_0}.$$

La système d'équations (3, 4) se réduira alors aux deux suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} (3) & \dfrac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2} - \beta\dfrac{x(y-\tau')^2}{1+\tau'^2} = 0, \\ (7) & \dfrac{y(x-\tau)(1-x\tau)}{1+\tau^2} - \alpha\dfrac{x(y-\tau')(1-y\tau')}{1+\tau'^2} = 0, \\ & \text{ou} \\ (8) & \dfrac{y(x-\tau)(1-x\tau)}{1+\tau^2} + \alpha\dfrac{x(y-\tau')(1-y\tau')}{1+\tau'^2} = 0. \end{array}\right.$$

On en aura, ensuite, deux systèmes analogues : (4, 7) et (4, 8). Mais il est clair qu'on aura les solutions des trois derniers systèmes d'équations, des solutions communes aux équations (3) et (7).

On peut écrire ces dernières de la façon suivante :

$$(9) \qquad \frac{1}{1+\tau^2}\,\frac{y(x-\tau)}{x(y-\tau')} = \frac{\beta}{1+\tau'^2}\,\frac{y-\tau'}{x-\tau} = \frac{\alpha}{1+\tau^2}\,\frac{1-y\tau'}{1-x\tau};$$

on n'aura alors qu'à considérer l'équation (3) avec l'une de celles-ci, avec la dernière, par exemple,

$$(10) \qquad \beta(y-\tau')(1-x\tau) - \alpha(x-\tau)(1-y\tau') = 0.$$

On en tire

$$(11) \qquad y = \frac{\alpha(x-\tau)+\beta\tau'(1-x\tau)}{\beta(1-x\tau)+\alpha\tau'(x-\tau)}.$$

D'où

$$(d) \qquad y-\tau' = \frac{\alpha(1-\tau'^2)(x-\tau)}{\beta(1-x\tau)+\alpha\tau'(x-\tau)},$$

et si l'on substitue ces valeurs dans (3), on arrive à l'équation

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\alpha^2\tau'+\beta^2\tau'\tau^2-\alpha\beta\tau(1-\tau'^2)]x^2 \\ &\quad -[2(\alpha^2+\beta^2)\tau\tau'-\alpha\beta(1+\tau^2-\tau'^2)+\beta\alpha^2(1-\tau'^2)]x \\ &\qquad\qquad +\alpha^2\tau^2\tau'+\beta^2\tau'-\alpha\beta\tau(1-\tau'^2)=0, \end{aligned} \right.$$

qui sera satisfaite, d'une façon approchée, par la racine de l'équation plus simple

$$-\alpha(\alpha-1)x+\beta\tau'-\alpha\tau=0,$$

c'est-à-dire la racine très petite suivante :

$$(13) \qquad x = \frac{\alpha\tau-\beta\tau'}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Elle sera, en outre, satisfaite par la racine très grande

$$(14) \qquad x = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha\tau-\beta_0\tau'} \quad (^1).$$

Les racines (13) et (14) étant réciproques seront évidemment aussi les solutions des équations (4) et (7).

On aura les solutions communes des équations (3) et (8) et, par

---

(1) En réalité, cette dernière racine, déduite de l'équation (12), est la suivante :

$$x = \frac{\beta(1-\alpha)}{\beta\tau-\alpha\tau'}.$$

Mais cette différence n'est qu'apparente et disparaît dès qu'on remplace α par sa valeur $\sqrt{\beta\beta_0}$.

conséquent, de (4) et (8) en changeant α en $-\alpha$ dans les précédentes. On obtient ainsi

$$x = \frac{\alpha\tau + \beta\tau'}{\alpha(1+\alpha)} \tag{15}$$

et

$$x = \frac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha\tau + \beta_0\tau'}. \tag{16}$$

En substituant (13) dans (11), on obtient les coordonnées suivantes

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha\tau - \beta\tau'}{\alpha(1-\alpha)}, \\ y = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{\alpha\tau - \beta\tau'}{1-\alpha} \end{cases}$$

du point singulier, correspondant au point (γ) du Tableau A.

On voit, en effet, que si $\tau' = 0$ et si, comme nous le supposions alors, $\varpi' - \varpi = 0$, que, par conséquent, $\beta = \beta_0 = \alpha$, on retombe sur les valeurs $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ et $\frac{\alpha\tau}{1-\alpha}$ de x et de y.

En substituant, de même, (14) dans la réciproque de (11) et de même (15) et (16) respectivement dans les mêmes valeurs de y, mais où l'on aurait changé α en $-\alpha$, on obtiendra les coordonnées suivantes, qui se déduisent immédiatement de celles du point γ, à savoir

$$(\gamma') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha\tau - \beta_0\tau'}, \\ y = \dfrac{\beta_0}{\alpha}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha\tau - \beta_0\tau'}, \end{cases}$$

$$(\delta) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha\tau + \beta\tau'}{\alpha(1+\alpha)}, \\ y = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{\alpha\tau + \beta\tau'}{1+\alpha}, \end{cases} \qquad (\delta') \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha\tau + \beta_0\tau'}, \\ y = \dfrac{\beta_0}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha}{\alpha\tau + \beta_0\tau'}. \end{cases}$$

Remarque. — L'inspection des coordonnées précédentes montre que l'on passe d'un x quelconque à l'y correspondant et *inversement*, en permutant les quantités τ et τ' et en prenant les inverses réciproques des quantités α, β et β_0.

Cette symétrie était évidente, *a priori*, car x et y, n'étant autre chose que les exponentielles qui ont pour argument respectif les anomalies excentriques des deux planètes P et P′, déterminent dans l'orbite les positions respectives de ces planètes, et l'on passe d'une planète à l'autre, en permutant les excentricités, les longitudes des périhélies et le rapport des grands axes.

22. Passons maintenant aux points singuliers de deuxième espèce. On tire de l'équation (5)

$$(17)\qquad y = \frac{c(x+\tau) + a\beta\tau'(1-x\tau)}{c\tau'(x+\tau) - a\beta(1-x\tau)},$$

d'où

$$(e)\qquad y - \tau' = \frac{c(1-\tau'^2)(x+\tau) + 2a\beta\tau'(1-x\tau)}{c\tau'(x+\tau) - a\beta(1-x\tau)}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3), mise sous la forme

$$(3)\quad y(x-\tau)^2 - \beta x(y-\tau')^2 + \tau'^2 y(x-\tau)^2 - \beta\tau^2 x(y-\tau')^2 = 0,$$

on a

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-\tau)^2[c^2\tau'(x+\tau)^2 - a\beta c(1-\tau'^2)(x+\tau)(1-x\tau) \\ &\qquad\qquad - a^2\beta^2\tau'(1-x\tau)^2] \\ &-\beta x[c^2(1-\tau'^2)^2(x+\tau)^2 \\ &\qquad + 4a\beta c\tau'(1-\tau'^2)(x+\tau)(1-x\tau) \\ &\qquad\qquad + 4a^2\beta^2\tau'^2(1-x\tau)^2] \\ &+\tau'^2(x-\tau)^2 \times \text{premier crochet} \\ &\qquad\qquad - \tau^2\beta x \times \text{second crochet} = 0. \end{aligned}\right.$$

En faisant, dans les deux premiers crochets, les développements indiqués, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de x et finalement ne gardant que les termes du premier ordre en τ et τ' dans le coefficient de x^4, du second ordre, au plus, dans le coefficient de x^3

et ainsi de suite, on arrive à ce qui suit :

$$
\begin{aligned}
& c(a\beta\tau + c\tau')x^4 - \beta\left\{\begin{matrix} ac + ac(\tau^2 - \tau'^2) - 2a^2\beta\tau\tau' \\ + c^2 - 2c^2\tau'^2 - 4a\beta c\tau\tau' \end{matrix}\right\}x^3 \\
& + \left\{\begin{matrix} -2c^2\tau'\tau^2 + a\beta c\tau(1 - \tau^2 - \tau'^2) - a^2\beta^2\tau'(1 + 4\tau^2) \\ -2\beta c^2\tau(1 - 2\tau'^2) - 4a\beta^2 c\tau'(1 - \tau^2 - \tau'^2) + 8a^2\beta^3\tau'^2\tau \end{matrix}\right\}x^2 \\
& + \beta\left\{\begin{matrix} ac\tau^2(1 + \tau^2 - \tau'^2) + 2a^2\beta\tau\tau'(1 + \tau^2) \\ - c^2\tau^2(1 - 2\tau'^2) - 4a\beta c\tau\tau'(1 - \tau'^2) - 4a^2\beta^2\tau'^2 \end{matrix}\right\}x \\
& + c^2\tau^4\tau' - a\beta c\tau^3(1 - \tau'^2) - a^2\beta^2\tau'\tau^2.
\end{aligned}
$$

Dans chacun de ces coefficients, la première ligne se rapporte au premier crochet, la seconde ligne au second crochet de l'équation (18).

La seule inspection des coefficients précédents montre que les seuls termes en x, qu'il faudra garder des deux derniers crochets de l'équation (18), seront les suivants :

$$
\begin{aligned}
& + \beta\left\{\begin{matrix} -ac\tau'^2 \\ -c^2\tau^2 \end{matrix}\right\}x^3 + \beta\left\{\begin{matrix} ac\tau\tau'^2 - a^2\beta\tau'^3 \\ - 2c^2\tau^3 - 4a\beta c\tau'\tau^2 \end{matrix}\right\}x^2 \\
& + \beta\left\{\begin{matrix} ac\tau^2\tau'^2 + 2a^2\beta\tau\tau'^3 \\ - c^2\tau^4 - 4a\beta c\tau^3\tau' - 4a^2\beta^2\tau^2\tau'^2 \end{matrix}\right\}x - \beta\left\{\begin{matrix} ac\tau^3\tau'^2 \\ + a^2\beta\tau^3\tau^2, \end{matrix}\right.
\end{aligned}
$$

et, par conséquent, l'équation finale sera

$$
(19)\quad \left\{\begin{aligned}
& c(a\beta\tau + c\tau')x^4 + \beta[-c(a + c) - c(a + c)\tau^2 \\
& \qquad + 2a\beta(a + 2c)\tau\tau' + 2c^2\tau'^2]x^3 \\
& + [\beta c(a - 2c)\tau - a\beta^2(a + 4c)\tau' \\
& \quad - \beta c(a + 2c)\tau^3 - 2(c^2 + 2a^2\beta^2)\tau^2\tau' \\
& \quad + 4\beta(c^2 + 2a^2\beta^2)\tau\tau'^2 - a\beta^2(a - 4c)\tau'^3]x^2 \\
& + \beta[c(a - c)\tau^2 + 2a\beta(a - 2c)\tau\tau' - 4a^2\beta^2\tau'^2 \\
& \quad + c(a - c)\tau^4 + 2a\beta(a - 2c)\tau^3\tau' \\
& \quad + 2(c^2 - 2a^2\beta^2)\tau^2\tau'^2 + 2a\beta(a + 2c)\tau\tau'^3]x \\
& \qquad - a\beta c\tau^3 - a^2\beta^2\tau^2\tau' + c^2\tau'\tau^4 - a^2\beta^2\tau^2\tau'^3 = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Cette équation sera satisfaite, d'une façon approchée, par la racine

très grande

$$x = +\beta \frac{a+c}{a\beta\tau + c\tau'}, \tag{20}$$

et par les racines de l'équation suivante

$$\left\{\begin{aligned} & c(c+a)x^3 + [c(2c-a)\tau + a\beta(a+4c)\tau']x^2 \\ & \quad + [c(c-a)\tau^2 + 2a\beta(2c-a)\tau\tau' + 4a^2\beta^2\tau'^2]x \\ & \qquad\qquad + a(c\tau^3 + a\beta\tau^2\tau') = 0, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

équation homogène en x, τ et τ'. Les racines seront très petites et de l'ordre de τ et de τ'.

Remarque. — La racine (20) nous donnera un point singulier correspondant à ε' du Tableau A, car on a, pour $\tau' = 0$, $x = \frac{a+c}{a\tau}$. Quant à l'équation (21) elle doit se réduire, pour $\tau' = 0$, à l'équation (15) du n° **10**.

On a, en effet, si l'on y fait $\tau' = 0$, l'équation

$$(c+a)x^3 + (2c-a)\tau x^2 + (c-a)\tau^2 x + a\tau^3 = 0,$$

ou bien la suivante

$$(x+\tau)[(c+a)x^2 + (c-2a)\tau x + a\tau^2] = 0.$$

Le second facteur égalé à zéro est bien l'équation dont il s'agit.

L'équation (19) donnera, par conséquent, trois points singuliers correspondant, respectivement, aux points ε', μ et ν du Tableau A et un quatrième point η, se réduisant à $x = -\tau$, $y = 0$ pour $\tau' = 0$. Ce dernier point est nouveau.

25. L'équation (21) pourra toujours être résolue dans les applications numériques. On aura donc sans difficulté le point singulier qui convient au problème. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas général et une discussion des racines de cette équation est nécessaire pour décider dans les différents cas les points singuliers qu'il faudra considérer.

Pour cela, nous allons discuter la courbe représentée par l'équation (21).

Supposons, pour simplifier, $\varpi' - \varpi = 0$; on aura alors $\beta = \alpha$. De plus, posons $\frac{x}{\tau} = X$ et $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = Y$; l'équation précédente deviendra ce qui suit :

$$(21') \quad \begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}+1\right)X^3 + \left[\frac{c}{a}\left(2\frac{c}{a}-1\right) + \left(1+4\frac{c}{a}\right)Y\right]X^2 \\ \quad + \left[\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}-1\right) + 2\left(2\frac{c}{a}-1\right)Y + 4Y^2\right]X + \frac{c}{a} + Y = 0. \end{cases}$$

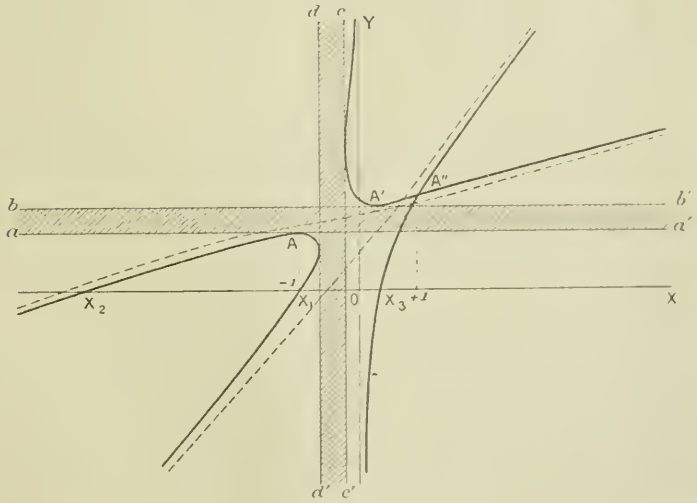
La forme de la courbe dépend, évidemment, du paramètre $\frac{c}{a}$. Ce rapport est, avons-nous dit, négatif dans le cas des inégalités à longue période; il est lié au rapport α des distances des deux planètes par la relation

$$\frac{c}{a} = -(\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse :

1° $1 < -\frac{c}{a} < \infty$, qui entraîne $\alpha > 1$. La forme de la courbe sera la suivante :

Fig. 1.



En désignant par X_1, X_2 et X_3 les trois racines de l'équation (21'), on verrait qu'elles seront réelles et inégales, X_2 étant la plus grande

en valeur absolue, pour toutes les valeurs du rapport $-\frac{c}{a}$ prises dans l'intervalle considéré et tant que $Y = \frac{\alpha\tau'}{\tau}$ restera plus petit que *un*.

En effet, voici ce qui se passe quand on fait varier le rapport $-\frac{c}{a}$. Faisons-le, par exemple, décroître d'une façon continue à partir d'une certaine valeur très grande jusqu'à une valeur voisine de l'unité. Dans ces conditions, X_2 s'éloignera, d'une façon continue, d'une valeur très voisine de X_1, cette dernière étant constamment égale à -1, jusqu'à $-\infty$, sur l'axe des x négatifs; le maximum de la courbe correspondra encore à $Y = 1$, tandis que les ordonnées respectives des points A' et A'' diminueront. Il en résultera le rapprochement de bb' avec aa', et il en sera de même des droites cc' et dd', aussi bien qu'au cas limite, il n'y aurait plus que des valeurs réelles des racines. Il est donc clair que les trois racines seront réelles, X_2 étant en valeur absolue la plus grande, tant que $Y < 1$; de plus, X_2 est l'abscisse du point μ, comme il est aisé de s'en assurer, en supposant $\tau' = 0$, c'est-à-dire $Y = 0$.

Pour $Y = 1$, les deux racines négatives deviendront égales. Pour $Y > 1$, mais inférieur à l'ordonnée de A', l'équation (21') aura deux racines imaginaires conjuguées, et une troisième réelle toujours plus petite que l'unité.

24. Il est intéressant, pour ce qui va suivre, de voir si le module commun de X_1 et de X_2 est plus petit ou plus grand que l'unité. Cela revient à chercher la valeur du rapport $-\dfrac{\frac{c}{a} + Y}{\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a} + 1\right)}$.

Or, il est clair que lorsqu'on fera varier Y à partir de la valeur *un*, pour laquelle le module commun $|X_1| = |X_2| = 1$, jusqu'à la valeur correspondante au point A', le numérateur du rapport considéré diminuera; il en sera, par suite, de même du rapport lui-même. Comme d'autre part la racine X_3 croît dans l'intervalle, le module commun $|X_1| = |X_2|$ ne pourra que diminuer et, par conséquent, il sera plus petit que l'unité.

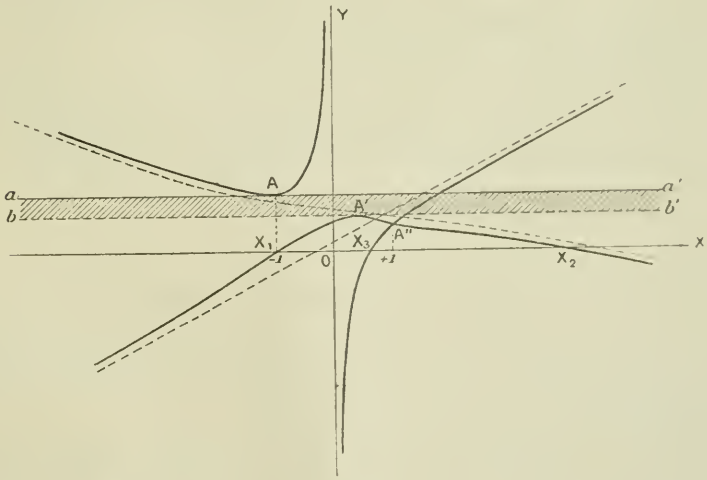
25. Continuons à faire varier Y. On aura de nouveau une racine

double au point A'; elles se sépareront ensuite : X_1 diminuera pour redevenir négative, tandis que X_2 ira atteindre la valeur $X_3 = 1$ pour $Y = -\frac{c}{a}$ et finalement croîtra au delà de toute limite avec Y, pour les valeurs de $Y = \frac{\alpha\tau'}{\tau} > -\frac{c}{a}$.

Remarque. — Il est facile de s'assurer que c'est X_1 qui deviendra, finalement, très petite et négative, tandis que X_2 croîtra vers $+\infty$, par la forme même de la courbe (1) dans le cas limite, par exemple, de $-\frac{c}{a} = 1$. On verrait que l'une des branches de l'hyperbole, à laquelle se réduit la courbe (21') dans ce cas, passe par $X_1 = -1$ et est asymptote à l'axe des y positifs, tandis que X_1 est situé à l'∞ sur la droite $Y = 1$.

26. Considérons maintenant le cas de : 2° $0 < -\frac{c}{a} < 1$, c'est-à-dire de $\alpha < 1$. La courbe est représentée par la *fig.* 2. Elle montre que c'est, au contraire, au-dessous d'un certain maximum de $Y < 1$,

Fig. 2.



que, les racines étant toutes trois réelles, deux sont positives et comprises respectivement entre 0 et 1, 1 et ∞; une troisième racine néga-

tive comprise entre 0 et -1, et c'est toujours X_2 la plus grande des trois.

Pour des valeurs de Y supérieures à l'ordonnée de A', on retombe, comme dans l'hypothèse précédente, sur deux racines imaginaires conjuguées qui vont redevenir réelles et égales pour $Y = 1$; enfin, trois racines réelles et inégales dont deux négatives pour $Y > 1$. De ces dernières, X_1 se rapprochera indéfiniment de l'origine, tandis que X_2 et X_3 croîtront au delà de toute limite.

Lorsqu'on fera varier, d'une façon continue, le rapport $-\frac{c}{a}$ de 0 à l'unité, les trois racines varieront de la façon suivante : X_1 restera constamment $= -1$; X_3 variera entre $+1$ et 0, en se rapprochant de l'origine, tandis que X_2 cheminera dans le sens contraire sur l'axe des X positifs à partir de $+1$ pour devenir ∞ quand $-\frac{c}{a}$ aura atteint la valeur 1.

Remarque. — Les conclusions sont les mêmes que dans le cas précédent; seulement, pour passer de la *fig.* 1 à la *fig.* 2, il faudrait changer aussi le nom des axes des coordonnées. En effet, la *fig.* 2 doit répondre à une courbe analogue à (21'), qui s'obtiendrait en éliminant non pas y mais x entre les équations (3) et (15).

Or, on passe de la valeur (17) de y à la valeur de x correspondante en y permutant entre eux les éléments y et x, τ et τ', ϖ et ϖ' et les rapports α et $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{c}{a}$ et $\frac{a}{c}$, en un mot en permutant les planètes; ce qui ramène aux mêmes conclusions.

27. Il reste enfin la dernière hypothèse, à savoir : 3° $-\frac{c}{a} = 1$; elle répond au cas intermédiaire entre les deux précédemment considérés. Dans ce cas, la courbe (21') se décompose en une droite $Y = 1$, et une hyperbole $4XY - 3X^2 - 2X + 1 = 0$.

Cette hypothèse n'est pas réalisée dans le système solaire. Elle correspondrait, en effet, au cas où les deux planètes décriraient une même orbite. Sa considération, cependant, rend mieux compte de la variation des points singuliers η, μ et ν.

28. Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

X_1, X_2, X_3 étant respectivement les abscisses des points singuliers η, μ et ν :

a. Ces points seront réels et l'abscisse de μ sera la plus grande en valeur absolue pour toutes les valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau} < 1$ ou bien $> -\frac{c}{a}$; le rapport $-\frac{c}{a}$ étant supposé > 1;

b. $X_1 = X_2 = -1$ pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = 1$ $\left(\text{ou } \frac{\tau'}{\tau} = \frac{1}{\alpha}\right)$ et $X_1 = X_2 < 1$ pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} =$ au minim. de la courbe;

c. $X_2 = X_3 = +1$ pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = -\frac{c}{a}$ $\left(\text{ou bien } \frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\alpha}\right)$;

d. X_1, X_2 imaginaires conjuguées et leur module commun plus petit que l'unité.

Des conclusions analogues pour les ordonnées respectives. D'ailleurs, il n'y a même pas lieu d'en tenir compte, ayant à étudier complètement, plus loin, la courbe (3).

On verra alors comment, en partant des conclusions auxquelles nous venons d'arriver, on pourra décider de l'admissibilité ou de la non-admissibilité des points singuliers.

Mais, avant, réunissons dans un Tableau tous les points singuliers de première et de deuxième espèce, de $\Phi(\tau)$, y compris les points ε, μ, η' et ν' réciproques de ces derniers.

Nous avons ainsi l'ensemble des points singuliers suivants :

TABLEAU B.

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \tau', \end{cases} \qquad (\alpha')\quad \begin{cases} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \frac{1}{\tau}, \end{cases}$$

$$(\tau)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \frac{1}{\tau'}, \end{cases} \qquad (\tau)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{\tau}, \\ y = \tau', \end{cases}$$

TABLEAU B (suite).

$$(\beta)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \beta_0 \tau, \end{cases} \qquad (\beta')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \dfrac{1}{\beta\tau}, \end{cases}$$

$$(\zeta)\quad \begin{cases} x = \tau, \\ y = \dfrac{1}{\beta_0 \tau\tau'^2}, \end{cases} \qquad (\zeta')\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\tau}, \\ y = \beta\tau\tau'^2, \end{cases}$$

$$(v)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau'}{\beta_0}, \\ y = \tau', \end{cases} \qquad (v')\quad \begin{cases} x = \dfrac{\beta}{\tau'}, \\ y = \dfrac{1}{\tau'}, \end{cases}$$

$$(w)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\tau'}{\beta}, \\ y = \dfrac{1}{\tau'}, \end{cases} \qquad (w')\quad \begin{cases} x = \dfrac{\beta_0}{\tau'}, \\ y = \tau', \end{cases}$$

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha\tau - \beta\tau'}{\alpha(1-\alpha)}, \\ y = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{\alpha\tau - \beta\tau'}{1-\alpha}, \end{cases} \qquad (\gamma')\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha\tau - \beta_0\tau'}, \\ y = \dfrac{\beta_0}{\alpha}\,\dfrac{1-\alpha}{\alpha\tau - \beta_0\tau'}, \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha\tau + \beta\tau'}{\alpha(1+\alpha)}, \\ y = \dfrac{\alpha}{\beta}\,\dfrac{\alpha\tau + \beta\tau'}{1+\alpha}, \end{cases} \qquad (\delta')\quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha(1+\alpha)}{\alpha\tau + \beta_0\tau'}, \\ y = \dfrac{\beta_0}{\alpha}\,\dfrac{1+\alpha}{\alpha\tau + \beta_0\tau'}, \end{cases}$$

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\beta_0}\,\dfrac{a\beta_0\tau + c\tau'}{c+a}, \\ y = \dfrac{a\beta_0\tau + c\tau'}{c+a}, \end{cases} \qquad (\varepsilon')\quad \begin{cases} x = \beta\,\dfrac{c+a}{a\beta\tau + c\tau'}, \\ y = \dfrac{c+a}{a\beta\tau + c\tau'}, \end{cases}$$

et les points $\mu(x_2 = \tau X_2, y_2)$, $\nu(x_3 = \tau X_3, y_3)$, $\eta(x_1 = \tau X_1, y_1)$ et les réciproques respectifs μ', ν', η'.

Remarque. — Pour $\varpi - \varpi' = 0$, on aura $\beta = \beta_0 = \alpha$ et les points singuliers deviendront tous réels.

V.

29. Il nous reste maintenant à examiner quels sont, parmi les points singuliers du Tableau précédent, ceux qui conviennent au problème. Mais une nouvelle difficulté surgit dans le cas présent.

C'est que, τ' n'étant plus nul, la relation entre z ou plutôt $z^{\frac{1}{c}}$ et les coordonnées des points singuliers devient

$$(1) \qquad z^{\frac{1}{c}} = x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a}{c}\frac{\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)} y e^{\frac{\tau'}{1+\tau'^2}\left(\frac{1}{y}-y\right)};$$

elle montre que, pour chaque valeur de $z^{\frac{1}{c}}$, on aura une infinité de valeurs de x et de y. En particulier, y ne s'exprimant plus uniformément en fonction de $x^{\frac{1}{c}}$ et de $z^{\frac{1}{c}}$, comme on a vu au n° **11**, mais ayant au contraire une infinité de déterminations, la fonction

$$(2) \qquad F(z, t) = \frac{t^{ad-bc-1} z^{-\frac{d}{c}}}{\sqrt{\Delta}}$$

en aura une double infinité. Il faudrait alors, dans la discussion, considérer pour chacune des déterminations de $F(z, t)$ les points singuliers qui lui appartiennent et s'assurer qu'ils resteront bien sur la détermination considérée, lorsqu'on fera varier $z^{\frac{1}{c}}$ le long de la droite D par exemple.

On est ainsi ramené à la considération de la surface de Riemann correspondante.

30. En faisant correspondre à chaque détermination un feuillet, nous aurions ainsi une infinité de feuillets, une infinité de plans sur lesquels il faudrait faire la même discussion. En reliant tous ces feuillets convenablement par les bords correspondants des points singuliers qui se trouvent sur chaque feuillet, on aura la surface de Riemann correspondant à notre fonction $F(z, t)$. Il est clair que, sur une sur-

face ainsi formée, la fonction $F(z, t)$ restera uniforme. A chaque point de cette surface correspondra maintenant un seul système de valeurs de x et de y pour $F(z, t)$ (exprimée en fonctions de ces dernières variables).

En faisant alors varier $z^{\frac{1}{e}}$, les points singuliers se sépareront, la surface de Riemann variera évidemment aussi et les positions finales sur la surface de Riemann correspondant à $\left|z^{\frac{1}{e}}\right| = 1$ montreront si le point singulier considéré est ou non admissible. Il faudra, pour qu'un point singulier soit admissible, que ses positions finales se trouvent dans les deux domaines séparées par le cercle $|x| = |y| = 1$ sur cette dernière surface ([1]).

Or, une pareille discussion est excessivement délicate : c'est ce qui fait la grande difficulté du problème.

31. Je dis qu'on peut cependant tourner encore cette difficulté dans le cas où nous nous plaçons et ramener au plan la discussion sur une surface de Riemann.

Rapportons-nous, pour le montrer, à l'équation de Képler relative à la planète P'. Cette équation montre que l'anomalie moyenne est bien une fonction uniforme de l'anomalie excentrique, mais qu'il n'en est pas de même de cette dernière regardée comme fonction de la première. A une valeur donnée de l'anomalie moyenne peuvent correspondre une infinité de valeur de l'anomalie excentrique. C'est précisément cette relation entre les deux anomalies qu'exprime l'équation (1) et qui conduit à la considération de la surface de Riemann.

Or, dans le cas présent, l'excentricité de P' est supposée très petite. On pourra donc la négliger, dans une première approximation, dans l'équation de Képler; l'anomalie excentrique deviendra alors fonction uniforme de l'autre anomalie. C'est le cas qui a déjà été considéré et pour lequel nous avons vu que y s'exprimait uniformément en fonction de $x^{\frac{1}{e}}$ et de $z^{\frac{1}{e}}$. Il en résultait pour $F(z, t)$, exprimée en fonction de ces mêmes variables, deux déterminations égales et de sens contraire.

---

[1]) *Voir* Poincaré, *Mécanique céleste,* t. I, p. 307.

32. Revenons maintenant au cas présent. On suppose $\tau' \neq 0$, mais petit. On pourra alors remplacer, dans le second terme de l'équation de Képler, l'anomalie excentrique par sa première valeur approchée en fonction de l'anomalie moyenne. Sous cette nouvelle forme l'équation de Képler fournira pour l'anomalie excentrique une fonction uniforme de l'anomalie moyenne. Cela revient à remplacer la relation (1) par la suivante :

$$(1') \qquad z^{\frac{1}{c}} = y x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a\tau}{c}\left(\frac{1}{x}-x\right)} e^{\tau'\left[z^{-\frac{1}{c}} x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a\tau}{c}\left(\frac{1}{x}-x\right)} - z^{\frac{1}{c}} x^{-\frac{a}{c}} e^{\frac{a\tau}{c}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right]}.$$

On en tirera y, fonction uniforme de $z^{\frac{1}{c}}$ et $x^{\frac{1}{c}}$ et, en remplaçant dans (2), il en résultera pour $F(z, t)$ une fonction de $z^{\frac{1}{c}}$ et $x^{\frac{1}{c}}$ n'ayant plus que deux déterminations, celles du radical. La discussion est de cette façon ramenée, comme celle du cas simple, au plan de la variable $x^{\frac{1}{c}}$.

33. Pour faire cette discussion nous allons tracer les courbes (3) et (4) (n° **20**) sur lesquelles se trouvent situés tous les points singuliers.

Une seule des courbes, la courbe (3) par exemple, sera suffisante; car les conclusions sur ses points seront évidemment les mêmes pour les points singuliers appartenant à la courbe (4).

Considérons donc l'équation

$$(3) \qquad \frac{y(x-\tau)^2}{1+\tau^2} - \alpha x \frac{(y-\tau')^2}{1+\tau'^2} = 0.$$

On a une courbe composée de trois branches, dont une passe par l'origine, la tangente en ce point étant

$$(a) \qquad y = \frac{\alpha\tau'^2}{\tau^2} x.$$

Les asymptotes sont : $x = 0$, $y = 0$ et $x = \alpha y + 2(\tau - \alpha\tau')$. Le

point $\alpha(x = \tau, y = \tau')$ est double et les deux déterminations ont pour tangentes respectives en ce point les droites

$$(b) \qquad y - \tau' = \pm\sqrt{\frac{\tau'}{\alpha\tau}}(x - \tau).$$

On pourra donc, dans le voisinage de α, les représenter par les deux développements suivants :

$$(c) \qquad \begin{cases} y_1 = \tau' + \sqrt{\frac{\tau'}{\alpha\tau}}(x - \tau) + a_1(x - \tau)^2 + \ldots, \\ y_2 = \tau' - \sqrt{\frac{\tau'}{\alpha\tau}}(x - \tau) + b_1(x - \tau)^2 + \ldots. \end{cases}$$

La forme de la courbe dépendra du paramètre $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$. Commençons par supposer :

I. $\frac{\alpha\tau'}{\tau} < 1$; l'asymptote coupera alors l'axe des y négatifs; les branches passant à l'origine et au point α tournent leur concavité vers les y positifs.

Entre le coefficient angulaire de la tangente à l'origine et celui de la tangente correspondante en α, il y a l'inégalité évidente

$$\frac{\alpha\tau'^2}{\tau^2} < \sqrt{\frac{\tau'}{\alpha\tau}}.$$

Le point α est le seul point double; en outre, la courbe, étant algébrique, n'aura pas des points d'arrêt ou anguleux.

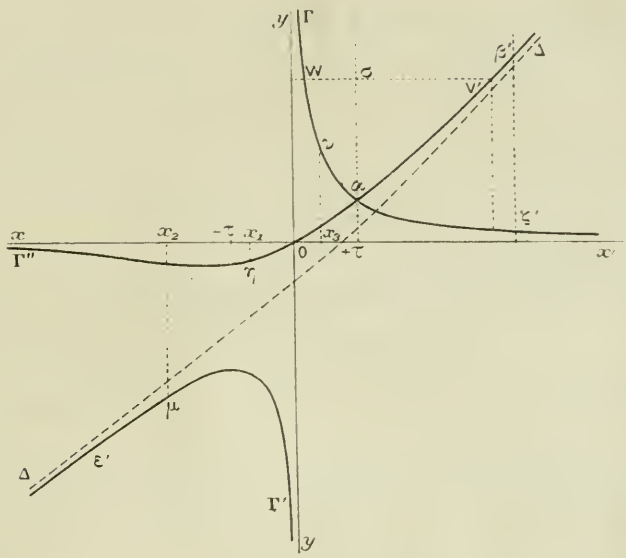
La forme sera, par conséquent, celle que montre la *fig.* I.

Les points singuliers satisfaisant à l'équation (3) sont : ε', μ, η, ν, w, σ, ε', β' et ζ'. Si l'on se rapporte au Tableau B, on verra qu'ils sont bien dans l'ordre indiqué sur la *fig.* I.

Les abscisses des points η, μ et ν sont les racines de l'équation (21) (voir *fig.* 1); quant à ε' il correspond à la racine très grande de l'équa-

tion (19); il satisfait à la fois à la courbe Γ' et à l'asymptote, comme il est aisé de le voir par ses coordonnées.

Fig. I.



34. Avant de commencer la discussion pour chacun de ces points, éliminons ceux qui ne sont singuliers qu'en apparence. Tels sont les points β et β', comme on a vu au n° **12**.

Une démonstration analogue, et qui se déduirait de celle du n° **12** par la permutation des quantités x et y, τ et τ', prouverait que les points v et v' sont aussi singuliers apparents pour $\Phi(z)$. De plus, il en est de même des points w et w'.

Quant aux points ζ' et ζ, remarquons qu'ils feront correspondre à $\left|\frac{1}{z}\right|$ deux valeurs respectivement voisines de o et de l'infini. On n'aura donc pas à en tenir compte.

Les seuls points qu'il nous reste à discuter seront les suivants :

$$\varepsilon', \ \mu, \ \nu, \ \sigma \text{ et } \alpha.$$

Discussion du point μ. — Ce point appartient à la branche de

courbe

$$(\Gamma') \qquad y_2 = \frac{(x-\tau)^2 + 2\alpha\tau' x + (x-\tau)\sqrt{(x-\tau)^2 + 4\alpha\tau' x}}{2\alpha x},$$

où x devra prendre des valeurs négatives.

Étudions la variation de $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ le long de cette branche. Au point à l'infini sur la courbe et très voisin de l'axe des y, on aura $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \infty$; $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ décroît ensuite d'une façon continue quand on suit la branche Γ' pour devenir o au point à l'infini sur la droite Δ.

Il a donc passé dans l'intervalle par un minimum, et ce minimum correspond évidemment au point de deuxième espèce μ, point de contact de la courbe (3) avec l'une des courbes $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \text{const.}$; ensuite, par un maximum qui correspond au point ε' également de deuxième espèce.

Le point μ étant un minimum pour $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$, faisons-le varier à partir de sa valeur $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_\mu < 1$, au point μ, jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. [Cela revient à faire varier $z^{\frac{1}{c}}$ le long de la droite d'argument $\left(1 + \frac{a}{c}\right)\pi$.] Les deux points confondus en μ se sépareront et continueront à rester sur Γ', car pour des points infiniment voisins $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ croît effectivement, comme nous venons de le voir. Il s'agit de chercher, maintenant, les positions finales de ces points par rapport au cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ tracé dans le plan de cette variable.

L'un des points, celui qui suit la partie μy de Γ', restera évidemment à l'intérieur de ce cercle, l'x correspondant continuant à diminuer quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ s'approchera de l'unité.

Le second point, au contraire, sera déjà sorti de ce cercle quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ sera devenu égal à 1. En effet, pour $x = -1$, $|y_2|$ devient $\frac{1}{\alpha}$ environ, quantité < 1; il en résulte pour $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ une valeur plus petite que un aussi.

Par conséquent, quand $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ aura atteint la valeur limite *un*, l'x du point en question sera devenu > 1; donc, sa position finale se trouvera en dehors du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$.

Le point μ, ayant des positions finales situées de part et d'autre de ce contour, est un point singulier véritable de $\Phi(z)$. Il est, par conséquent, comme son analogue du Tableau A, *admissible*.

35. On aurait même pu se dispenser de la discussion que nous venons de faire, en s'appuyant sur le théorème suivant de M. Poincaré :

Si l'on fait varier d'une façon continue les éléments des deux orbites, les points primitivement admissibles ne pourront pas, en général, devenir inadmissibles et inversement [1].

Cela tient à ce que les coordonnées x et y d'un point singulier quelconque ne sont autre chose que les exponentielles ayant pour arguments respectifs les deux anomalies excentriques. Supposons alors tracés les cercles $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ et $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$ ou bien $|y| = 1$, et admettons que pour $\tau' \neq 0$ les valeurs finales d'un point singulier, de μ par exemple, soient toutes les deux à l'intérieur de $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. Je dis que cela n'est pas possible. En effet, supposons que τ' tende vers zéro, il faudra, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ étant supposé égal à 1 et par suite $|y| = 1$ aussi, qu'une des valeurs finales se trouve à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. Or on les a supposées, au début, toutes deux à l'intérieur; donc il a fallu que l'une d'elles franchît le contour $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$. Or cela est évidemment impossible, car $|x| = 1$ et $|y| = 1$ entraînent des valeurs réelles pour les anomalies excentriques et par suite pour les positions des deux planètes dans les orbites respectives. Il faudrait alors, pour que le point μ fût singulier, que les planètes P et P′ se confondissent; or, cela n'est pas pos-

---

[1] Poincaré, *Mécanique céleste*, t. I, p. 307.

sible, les orbites des planètes ne se coupant pas. Donc aucune des valeurs finales de μ n'a pu franchir le contour $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, et l'hypothèse faite au début est à rejeter. Il reste alors à supposer les valeurs finales de μ situées des deux côtés du cercle $\left|x^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, et par conséquent μ *admissible* dans le cas présent.

Ce que nous venons de démontrer s'appliquera aussi à tous les points ayant leur analogue dans le Tableau A. Il sera donc inutile de répéter la discussion pour les points ε' et ν; ils seront *inadmissibles*.

36. Il nous reste les points η, α et σ.

Discussion du point η. — Il appartient à la branche de courbe

$$(\Gamma'') \qquad y_1 = \frac{(x-\tau)^2 + 2\alpha\tau' x - (x-\tau)\sqrt{(x-\tau)^2 + 4\alpha\tau' x}}{2\alpha x}.$$

C'est encore un point singulier de deuxième espèce et de contact avec l'une des courbes de la famille

$$z^{\frac{1}{c}} = \text{const}.$$

Quand on suit la branche Γ'', à partir de l'origine vers les x négatifs, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ part de la valeur 0, croît jusqu'à un certain maximum qu'il atteint au point η, décroît de nouveau pour redevenir nul pour $x = -\infty$.

En faisant varier maintenant $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ à partir de sa valeur en η jusqu'à $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 1$, les points confondus en η se sépareront en devenant imaginaires conjugués, parce que $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| < 1$ croît dans cet intervalle et, d'autre part, il est maximum en η quand on reste sur Γ''.

On pourrait démontrer, en construisant par exemple avec les parties réelles des coordonnées une courbe dont chacun des points représente l'ensemble des deux points conjugués, que les deux points imaginaires conjugués primitivement confondus en η iront à un moment donné se

confondre avec le point μ. Les valeurs finales seront celles de μ et par conséquent η sera *admissible*.

Mais il n'est même pas besoin de faire cette démonstration. En effet, on a vu (*fig.* 1) que, dans le cas où nous nous plaçons, l'abscisse de μ sera toujours plus grande que celle de η et, comme il en est de même des y respectifs, il en résulte que l'affixe de μ sera plus éloigné de l'origine que celui de η. On n'aura donc pas à tenir compte de η dans ce cas, le point μ étant admissible.

Le point σ sera admissible. En effet, on a en ce point

$$z^{\frac{1}{c}} = \tau^{\frac{a}{c}} \frac{1}{\tau'} e^{\frac{a}{c}\tau\left(\frac{1}{\tau}-\tau\right)} e^{\tau'\left(\tau'-\frac{1}{\tau'}\right)} = A \frac{\tau^{\frac{a}{c}}}{\tau'},$$

A étant fini, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|_\sigma$ est évidemment plus grand que 1.

Faisons décroître $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ jusqu'à la valeur 1, les deux points confondus en σ se séparent : l'un $\sigma_1(x=\tau, y)$ restera sur la droite $x=\tau$ et son x restera toujours inférieur à l'unité, l'autre $\sigma_2\left(x, y=\frac{1}{\tau'}\right)$ suivra la droite $y=\frac{1}{\tau'}$ dans le sens croissant des x et sortira du contour $|x|=1$, car on a, pour $x=1$, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \frac{1}{\tau'} > 1$. Les points σ et σ' seront, par conséquent, *admissibles*.

Discussion du point α. — On a, pour ce dernier point, $z^{\frac{1}{c}} < 1$. En faisant varier $z^{\frac{1}{c}}$ à partir de sa valeur en α, quatre points confondus en α se séparent et, dès ce moment, continueront à cheminer respectivement sur les droites $x=\tau$, $y=\tau'$ et sur les branches Γ et Γ'', et cela dans le sens croissant des x.

Le point $\alpha_1(x=\tau, y)$ ne sortira pas du contour $|x|=1$. *Pour* $\alpha_2(x, y=\tau')$,

$$z^{\frac{1}{c}} = \tau' x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a}{c}\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)} e^{\tau'\left(\frac{1}{\tau'}-\tau\right)} = A\tau' x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a}{c}\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)},$$

et pour la valeur finale de $z^{\frac{1}{c}}$, on aura

$$1 = A\tau' x^{\frac{a}{c}} e^{\frac{a}{c}\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)}.$$

Si nous négligeons τ dans une première approximation pour fixer la détermination avec laquelle nous portons, il est clair que x restera plus petit que *un*, $\frac{a}{c}$ étant < 0. Il en sera de même lorsque, dans l'exponentielle, on remplacera x par une première valeur approchée, et ainsi de suite.

Pour α_3, y décroît à partir de la valeur $y = \tau'$. Or, nous venons de voir pour α_2 que x était plus petit que l'unité pour $z^{\frac{1}{c}} = 1$, y étant constamment égal à τ'. Il en résulte qu'*a fortiori* l'x de α_3 sera plus petit que l'unité.

Pour α_4 la valeur finale de x sera supérieure à *un*. En effet, ce point appartient à la branche Γ'' et l'on a, d'une façon approchée pour $x = 1$.

$$y = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Il en résulte $z^{\frac{1}{c}} = ye^{-\tau\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)} < 1$ et, par conséquent, quand $z^{\frac{1}{c}}$ atteindra la valeur limite, x aura déjà dépassé cette même valeur, et le point α_4 se trouvera à l'extérieur du contour considéré.

Les points α et α' sont donc *admissibles*. Les points admissibles seront ainsi μ, η, σ' et α. Mais il est aisé de s'assurer, d'après ce qui précède, que c'est au point μ que le module de $z^{\frac{1}{c}}$ sera le plus grand. C'est donc le point μ qui convient au problème, dans le cas présent.

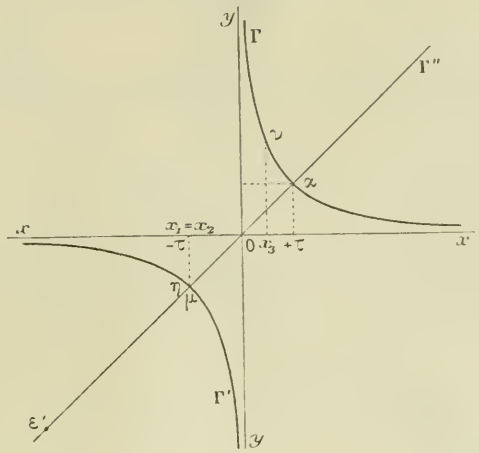
57. En continuant à rester dans l'hypothèse de la *fig.* 1, nous allons considérer maintenant le cas de : $\text{II}^\circ\ \frac{\alpha\tau'}{\tau} = 1$. — La courbe (3) se décompose, dans ce cas, en une droite $y = \frac{1}{\alpha}x$ passant par le point α, et en l'hyperbole $xy = \frac{\tau^2}{\alpha}$.

La situation des points singuliers importants est celle que l'on voit sur la *fig.* II. En effet, le tableau B montre que les coordonnées de ε' satisfont bien à la droite Γ'' et la *fig.* 1 que les abscisses x_1 et x_2 des points η et μ sont égales à $-\tau$; il en résulte que η et μ se confondent, dans le cas présent, au point commun à Γ' et Γ''.

Remarque. — On aurait pu voir autrement que les points η et μ devaient se confondre en un seul point dans le cas considéré : c'est en

faisant varier $\left|z^{\frac{1}{\tau}}\right|$ le long de Γ' et de Γ'' respectivement. On verrait facilement qu'il ne peut y avoir qu'un nombre *pair* de points singu-

Fig. II.



liers sur Γ' et un nombre *impair* sur la droite Γ''; donc, les points η et μ devaient nécessairement se confondre avec le point commun à la branche Γ' et à la droite Γ''.

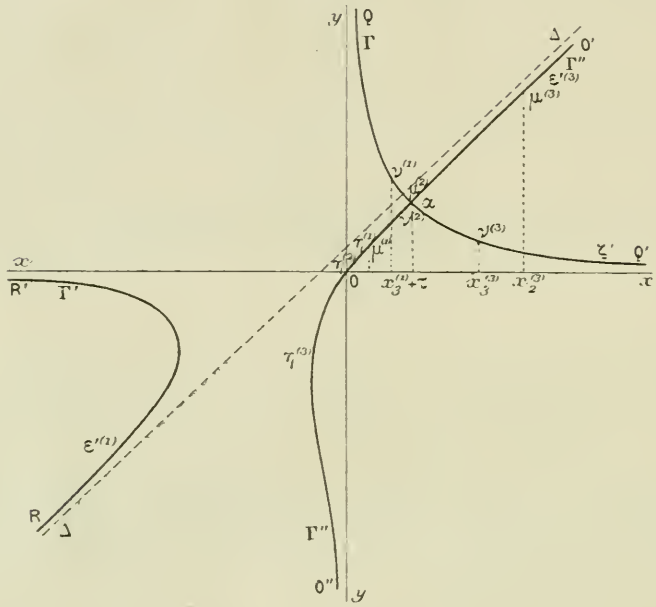
38. Il resterait maintenant à faire la discussion des points singuliers pour les valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ comprises entre l'unité et $-\frac{c}{a}$, et cela dans le cas de la *fig.* 2; $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ étant, dans ces conditions, toujours plus petit que 1, on resterait encore sur la *fig.* I. Mais nous préférons faire cette discussion en restant sur la *fig.* 1 déjà considérée. On aura donc à suivre la situation des points singuliers pour les valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ plus grandes que l'unité. On est ainsi amené à remplacer la *fig.* I par la suivante :

III° $\frac{\alpha\tau'}{\tau} > 1$. — La courbe (3) a, dans cette nouvelle hypothèse, la forme indiquée sur la *fig.* III.

Remarquons tout de suite la réciprocité entre les *fig.* I et III. Cela

tient à ce que, en permutant le nom des axes dans cette dernière, on aura, par là même, permuté les planètes P et P′, quand on passe de l'hypothèse I° à l'hypothèse III°.

Fig. III.



Nous avons vu (*fig.* 1) que pour des valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau} > 1$ les racines x_1 et x_2 sont d'abord imaginaires conjuguées; elles redeviennent réelles et égales, se séparent ensuite et, pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = -\frac{c}{a}$, x_1 s'annule, x_2 et x_3 deviennent égales à $+\tau$; finalement, pour des valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ supérieures à $-\frac{c}{a}$, la racine x_1 redevient < 0, x_2 et x_3 se séparent de nouveau, x_2 croissant plus rapidement que x_3 jusqu'à l'infini.

39. Voyons, maintenant, comment nous allons en déduire les positions correspondantes des points singuliers sur la courbe précédente (*fig.* III).

Pour cela, il faudra commencer par discuter la variation de $\left|\tau^{\frac{1}{c}}\right|$ sur cette même courbe.

Voici cette discussion sur chacune des branches.

Variation de $z^{\frac{1}{c}} = x^{\frac{a}{c}} y e^{\frac{a}{c}\tau\left(\frac{1}{x}-x\right)} e^{\tau'\left(\frac{1}{y}-y\right)}$. — Elle dépendra évidemment du signe de l'exposant : $\tau' + \frac{a}{c}\tau$.

Discussion sur Γ'. — Au point R, $\begin{matrix} x = -\infty \\ y = -\infty \end{matrix}$, $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = |x|^{\frac{a+c}{c}} e^{\left(\tau' + \frac{a}{c}\tau\right)\varepsilon}$; si

a.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau < 0$,	on trouve	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 0$,
b.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau = 0$,	»	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \infty$,
c.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau > 0$,	»	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = \infty$.

Au point R′, $\begin{matrix} x = -\infty \\ y = -\varepsilon \end{matrix}$; on trouve $\left|z^{\frac{1}{c}}\right| = 0$, et cela indépendamment des hypothèses précédentes.

Il en résulte qu'il y aura un point singulier et un seul situé sur Γ' et avec l'hypothèse *a* seulement. Ce point sera évidemment ε' et $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ y est maximum. Avec les deux autres hypothèses, il y aura zéro ou un nombre pair de points singuliers; or, la discussion des racines de l'équation (21) a montré que les autres points singuliers devaient se trouver dans le premier quadrant. Donc, pas de points singuliers sur Γ' dans les hypothèses *b* et *c*.

Sur Γ''. — Au point O″, $\begin{matrix} x = -\varepsilon \\ y = -\infty \end{matrix}$; $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ est ∞.

Au point O, $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$; si

a.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau < 0$,	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$	est	0,
b.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau = 0$,	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$	»	0,
c.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau > 0$,	$\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$	»	∞.

Au point O′, $\begin{matrix} x = +\infty \\ y = +\infty \end{matrix}$; si

a.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau < 0,$	$\left\lvert z^{\frac{1}{c}} \right\rvert$	est	$\infty,$
b.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau = 0.$	$\left\lvert z^{\frac{1}{c}} \right\rvert$	»	$\infty,$
c.	$\tau' + \frac{a}{c}\tau > 0,$	$\left\lvert z^{\frac{1}{c}} \right\rvert$	»	0.

Il en résulte qu'il n'y aura pas de points singuliers, dans les deux premières hypothèses, sur la première partie de la branche Γ″ (celle qui se trouve dans le troisième quadrant) et il y en aura un nombre *pair* sur l'autre.

Dans l'hypothèse *c* il y aura un seul point singulier sur la première partie de Γ″ et toujours un nombre pair sur la deuxième.

Sur Γ : Au point Q, $\begin{matrix} x = +\varepsilon \\ y = +\infty \end{matrix}$; on trouve $\left\lvert z^{\frac{1}{c}} \right\rvert = 0,$

Au point Q′, $\begin{matrix} x = +\infty \\ y = +\varepsilon \end{matrix}$; » $\left\lvert z^{\frac{1}{c}} \right\rvert = \infty,$

et cela indépendamment des hypothèses précédentes.

Donc, un nombre *pair* de points singuliers appartenant à cette dernière branche. Il est aisé de voir tout de suite que ce sont les points ν et ζ′.

40. Nous avons vu plus haut que le point ε′, se trouvant tout d'abord placé sur Γ′, disparaissait dans les deux autres hypothèses. Suivons-le un peu dans son mouvement.

Cela aurait pu se faire en construisant non pas la courbe représentée par l'équation (21), mais la courbe (19). Mais il est plus commode de suivre son déplacement par ses coordonnées. On verra ainsi que si

a′.	$\tau' + \alpha\frac{a}{c}\tau < 0,$	le point ε′ se trouve	dans le troisième	quadrant,
b′.	$\tau' + \alpha\frac{a}{c}\tau = 0,$	»	»	à l'infini,
c′.	$\tau' + \alpha\frac{a}{c}\tau > 0,$	»	»	dans le premier quadrant,

et comme il ne pourra pas se trouver sur la branche Γ, il sera donc venu sur Γ″ dans la dernière hypothèse.

Avant d'aller plus loin une remarque est nécessaire. Il nous faut la situation sur la *fig.* 3 des points singuliers dans les trois cas suivants, à savoir, si

a''.	$\frac{\alpha\tau'}{\tau} < -\frac{c}{a}$,	et ceci revient à	$\frac{\tau'}{\tau} < \sqrt{\alpha}$.
b''.	$\frac{\alpha\tau'}{\tau} = -\frac{c}{a}$,	» »	$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\alpha}$.
c''.	$\frac{\alpha\tau'}{\tau} > -\frac{c}{a}$,	» »	$\frac{\tau'}{\tau} > \sqrt{\alpha}$,

tandis que nous venons de trouver deux autres groupes d'hypothèses, différents entre eux et avec ce dernier.

Il s'agit de savoir quel est le rapport qui existe entre eux; en d'autres mots, à quoi tient cette différence.

Mais il n'est pas difficile de s'assurer que la différence n'est qu'apparente et qu'au fond on n'a qu'un seul groupe d'hypothèses, qui est le dernier. Pour le voir il suffira de remarquer qu'on passera, par exemple, de (b') à (b'') en permutant τ et τ' entre eux; cela tient à ce que, α étant plus grand que un, lorsque $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ a varié de un à $-\frac{c}{a}$, le rapport $\frac{\tau'}{\tau}$ a passé par l'unité; et que l'on passera de la limite b à la limite b'' en divisant celle-ci par α, après avoir permuté τ et τ'. Cela tient à ce que l'on a construit la courbe (3) avec le paramètre variable $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$, tandis qu'on aurait pu la construire en prenant $\frac{\tau'}{\tau}$ pour paramètre et rester dans le cas de la *fig.* 1, c'est-à-dire avec $\alpha > 1$.

Nous n'aurons plus à considérer, pour ce qui va suivre, que les trois dernières hypothèses qui, à l'aide de la *fig.* 1, vont nous permettre de suivre sur la *fig.* 3 le mouvement des points singuliers.

Les positions des points singuliers, dans les trois cas, seront figurées sur la courbe par le nom des points, accompagné d'indices.

41. Cela étant, voyons comment les points singuliers de deuxième espèce vont se déplacer sur la courbe.

Si l'on se rapporte à la courbe (21′), *fig.* 1, on voit que les racines x_1 et x_2 sont confondues en A′ à un moment donné; à ce moment-là les points η et μ seront confondus sur la même branche Γ'' de la courbe (3) en $\eta^{(1)}\mu^{(1)}$; $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ continue à croître en restant $< -\frac{c}{a}$; les points η et μ, dont les abscisses respectives s'approchent de l'origine et de la valeur $+\tau$, se séparent, η chemine vers l'origine tandis que μ et ν s'approchent du point α. Dans tout cet intervalle on a bien un nombre pair de points singuliers aussi bien sur Γ'' (seconde partie) que sur Γ, comme on a vu plus haut; le point ε' se trouve en $\varepsilon'^{(1)}$ sur Γ'.

Pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = -\frac{c}{a}\left(\text{ou bien } \frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\alpha}\right)$ la *fig.* 1 montre que l'on a $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = +\tau$. Les points singuliers correspondants se trouveront donc en $\eta^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ et $\nu^{(2)}$ sur Γ'' et ε' sera à l'infini.

Enfin, pour $\frac{\alpha\tau'}{\tau} > -\frac{c}{a}\left(\frac{\tau'}{\tau} > \sqrt{\alpha}\right)$, le point η a franchi l'origine pour venir en $\eta^{(3)}$ sur Γ'', μ et ν confondus en $\mu^{(2)}$, $\nu^{(2)}$ avec α se séparent pour suivre respectivement les branches Γ'' et Γ en même temps que ε' est venu sur la branche Γ''. A partir de ce moment, on aura bien : un nombre *pair* de points sur Γ'' (premier quadrant), un nombre *pair* aussi sur Γ, un point seul, le point η, sur Γ'' (troisième quadrant) et pas de point sur Γ', parfaitement d'accord avec la variation de $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ sur chacune de ces branches.

Remarque I. — On n'a pas tenu compte du point α quand on a fait varier $z^{\frac{1}{c}}$ le long de Γ ou de Γ'' séparément. Cela tient à ce que α n'est pas de même nature que η, μ, ν et ε'. Mais il faudra en tenir compte quand on le considérera comme un point anguleux de la branche $Q\alpha O'$ ou bien de $O\alpha Q'$.

Dans ces conditions, $z^{\frac{1}{c}}$ part de o pour croître jusqu'à l'infini sur chacune des branches précédentes et cela dans les deux premières hypothèses. On aura, par conséquent, un nombre *pair* de points singuliers pour chacune des branches $Q\alpha O'$ et $O\alpha Q'$. Ces points sont ν et α pour la première, α et ζ' pour la seconde.

Avec la dernière hypothèse on trouve que $z^{\frac{1}{c}}$ varie de O pour revenir

à O sur $Q\alpha O'$, donc un nombre *impair* de points singuliers; ce sont α, μ et ε', tandis que sur $O\alpha Q'$, $z^{\frac{1}{c}}$ part de l'infini pour revenir à l'infini; encore un nombre impair de points singuliers qui seront α, ν et ζ'.

C'est là une vérification de la discussion faite plus haut.

Remarque II. — Dans toute cette variation $\left|z^{\frac{1}{c}}\right|$ est un minimum au point μ et un maximum aux points ν et ε'.

42. Comme en vertu d'un théorème énoncé ailleurs (n° **35**), les points ν et ε' resteront inadmissibles et μ admissible, ce sera ou bien le point μ ou bien α qui conviendra au problème. La discussion précédente a montré que, si l'on supposait $-\frac{c}{a} > 1$, c'était le point μ qu'il fallait considérer pour toutes les valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ plus petites que *un* ou plus grandes que $-\frac{c}{a}$, le module de μ étant dans ce dernier cas supérieur à celui de α. Dans le cas de $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = 1$, trois points η, μ et α se trouveront sur le contour de convergence et deux seulement, à savoir μ et α, dans l'autre cas limite $\frac{\alpha\tau'}{\tau} = -\frac{c}{a}$. Enfin, pour des valeurs de $\frac{\alpha\tau'}{\tau}$ comprises entre ces deux limites le module de μ étant évidemment inférieur à celui de α, ce sera ce dernier qui conviendra au problème.

On obtiendra exactement les mêmes résultats en restant sur la *fig.* I et en suivant sur la *fig.* 2 la marche des abscisses des points singuliers.

Remarquons encore que les cas limites n'auront jamais lieu dans le système solaire; il en résulte qu'il n'y aura qu'un seul point singulier sur la circonférence limite de convergence.

Cela simplifiera beaucoup les calculs dans les applications.

Nous arrivons donc à la conclusion finale suivante :

Si les excentricités des deux planètes sont petites sans être nulles, l'inclinaison étant supposée nulle, si, de plus, le produit du rapport des distances par celui des excentricités est inférieur à

l'unité ou supérieur au rapport $-\frac{c}{a}$, *c'est encore le point* μ *et son réciproque* μ' *qui vont définir le domaine de convergence de* $\Phi(z)$ *et permettront d'obtenir la* partie principale *du coefficient général, dans le développement en série de Laurent.*

Pour des valeurs du même produit comprises entre les deux limites précédentes ce sera, au contraire, le point α qu'il faudra prendre.

43. Il nous reste maintenant à donner les formules qui serviront au calcul de la valeur approchée du terme général de $\Phi(z)$. On n'aura pas à répéter ce qui a été fait au § III. Nous nous bornerons à donner simplement les résultats; disons seulement qu'il sera préférable de prendre ici la variable t pour variable indépendante, quitte à introduire les variables x et y dans les formules finales.

On tire de

$$\Delta = L^4 E E_0,$$

E et E_0 étant les mêmes expressions que précédemment,

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dt^2}\right)_{0,0} = L^4\left(E\frac{d^2E_0}{dt^2}\right)_{0,0},$$

en supposant, par exemple, que c'est le point μ' qui convient au problème.

Calcul de $\left(E\frac{d^2E_0}{dt^2}\right)_{0,0}$. — On trouve

$$\begin{aligned}\frac{d^2E_0}{dt^2} = &-(\cos u - i\cos\varphi\sin u)\frac{du^2}{dt^2} + \alpha(\cos u' - i\cos\varphi'\sin u')\frac{du'^2}{dt^2}\\ &-(\sin u + i\cos\varphi\cos u)\frac{d^2u}{dt^2} + \alpha(\sin u' + i\cos\varphi'\cos u')\frac{d^2u'}{dt^2}.\end{aligned}$$

Des relations suivantes

$$l = u - \sin\varphi\sin u, \qquad l' = u' - \sin\varphi'\sin u',$$

$$e^{il} = t^c, \qquad e^{il'} = t^{-a}z^{\frac{1}{c}},$$

on déduit

$$\frac{du}{dt} = \frac{c}{it}\,\frac{1}{1-\sin\varphi\cos u}, \qquad \frac{du'}{dt} = -\frac{a}{it}\,\frac{1}{1-\sin\varphi'\cos u'},$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{c}{it^2(1-\sin\varphi\cos u)^2}\left[\frac{c}{i}\,\frac{\sin\varphi\sin u}{1-\sin\varphi\cos u}+1\right],$$

$$\frac{d^2u'}{dt^2} = \frac{a}{it^2(1-\sin\varphi'\cos u')^2}\left[-\frac{a}{i}\,\frac{\sin\varphi'\sin u'}{1-\sin\varphi'\cos u'}+1\right],$$

et, si l'on introduit les variables x et y, on obtient finalement

$$\frac{d^2\mathrm{E}}{dt^2} = \frac{1}{2t^2(x-\tau)(1-x\tau)(y-\tau')(1-y\tau')}$$
$$\times\left\{\begin{aligned}
&c^2(1+\tau^2)x(y-\tau')^2(1-y\tau')^2[(x^2+1)(1+\tau^2)-(x^2-1)]\\
&\quad-\alpha a^2(1+\tau'^2)y(x-\tau)^2(1-x\tau)^2[(y^2+1)(1+\tau'^2)-(y^2-1)]\\
&\quad-c(1+\tau^2)x\frac{(y-\tau')^2(1-y\tau')^2}{(x-\tau)(1-x\tau)}[(x^2-1)(1+\tau^2)-(x^2+1)]\\
&\qquad\times[(x-\tau)(1-x\tau)-c\tau(x^2-1)]\\
&\quad-\alpha a(1+\tau'^2)y\frac{(x-\tau)^2(1-x\tau)^2}{(y-\tau')(1-y\tau')}[(y^2-1)(1+\tau^2)-(y^2+1)]\\
&\qquad\times[(y-\tau')(1-y\tau')+a\tau'(y^2-1)].
\end{aligned}\right.$$

On a, en outre,

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2xy(1+\tau^2)(1+\tau'^2)}\{y[(x^2+1)(1+\tau^2)-4\tau x+(x^2-1)]$$
$$-\alpha x[(y^2+1)(1+\tau'^2)-4\tau' y+(y^2-1)]\};$$

et si l'on appelle, pour abréger, f_1 le crochet dans l'expression de $\frac{d^2\mathrm{E}_0}{dt^2}$ et f l'expression, changée de signe, de E, on aura

$$\left(\mathrm{E}\frac{d^2\mathrm{E}_0}{dt^2}\right) = -ff_1,$$

expression qui entre dans le calcul du coefficient $\mathrm{C}_{m,m'}$.

On aura ainsi les formules suivantes :

$$\text{I.} \qquad F_1^0 = \sum C_{m,m'} e^{\sqrt{-1}(ml+m'l')},$$

$$\text{II.} \qquad C_{m,m'} = \frac{1}{L^2 \pi n} \frac{(x-\tau)(1-x\tau)(y-\tau')(1-y\tau')}{x^m y^{m'} e^{\omega} \sqrt{ff_1}},$$

$$(a) \qquad \omega = \frac{m\tau}{1+\tau^2}\left(\frac{1}{x} - x\right) + \frac{m'\tau'}{1+\tau'^2}\left(\frac{1}{y} - y\right),$$

$$(b) \quad \begin{cases} \tau = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi = e, \quad \tau' = \operatorname{tang}\frac{\varphi'}{2}, \quad \sin\varphi' = e', \\ \beta = L'^2 L^{-2} e^{\sqrt{-1}(\varpi'-\varpi)}, \quad \beta_0 = L'^2 L^{-2} e^{-\sqrt{-1}(\varpi'-\varpi)}, \\ \alpha = L'^2 L^{-2} > 1. \end{cases}$$

L^2, L'^2, e, e', ϖ, ϖ' désignant respectivement les demi-grands axes, les excentricités et les longitudes des périhélies des planètes P et P′.

L'expression de $C_{m,m'}$, symétrique par rapport aux éléments des deux planètes, est de l'ordre de $\frac{1}{n}$, n désignant le rang dans la série ; elle sera, par conséquent, d'autant plus approchée que n sera élevé.

On prendra le radical avec le signe + (*voir* n° **17**).

Pour passer maintenant de la valeur précédente de $C_{m,m'}$ aux valeurs approchées des coefficients de $\cos(ml + m'l')$ et de $\sin(ml + m'l')$, dans le développement de F_1^0 en série de la forme $\frac{\cos}{\sin}(ml + m'l')$, on n'aura qu'à prendre respectivement le double de la partie réelle et du coefficient de $-\sqrt{-1}$ dans l'expression (II).

De l'aire plane balayée par un vecteur variable,

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève-Ingénieur des Télégraphes.

Les principales questions dont je me suis occupé dans cette étude avaient déjà, pour la plupart, été abordées à diverses reprises par différents auteurs : dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1878, M. Liguine a fait de leurs travaux un historique très complet qu'il me suffira de résumer en quelques lignes.

Steiner, dans un Mémoire publié en 1840 dans le *Journal de Crelle*, étudie, entre autres questions, les relations qui ont lieu entre les aires décrites par les vecteurs qui joignent les différents points d'un plan mobile à son centre instantané de rotation : il trouve que, pour un mouvement donné, les points de ce plan mobile auxquels correspondent ainsi des aires équivalentes sont les points d'une circonférence; il suppose d'ailleurs convexes les deux arcs (ω) et (ω') formés par les centres instantanés dans le plan fixe et dans le plan mobile. Dans le cas particulier où tous les points du plan mobile décrivent des courbes fermées, il trouve que le centre de la circonférence obtenue coïncide avec le centre de gravité de la courbe (ω), à la condition d'attribuer aux divers éléments de cette courbe une masse proportionnelle à la somme des courbures correspondantes des arcs (ω) et (ω').

Indépendamment de ce travail de Steiner, M. Holditch énonce, en 1858, le théorème suivant :

Lorsqu'une corde d'une longueur donnée et invariable se meut dans une courbe fermée en parcourant la circonférence totale de la courbe par ses extrémités A, B, *et si l'on considère la courbe décrite par un point* P *de cette corde qui la divise en deux parties,* $AP = C_1$, $BP = C_2$, *l'aire comprise entre les deux courbes fermées est égale à* $\pi C_1 C_2$.

En 1877, M. Williamson généralise ce théorème et obtient, sous une autre forme, le résultat que j'énonce au n° **18**.

D'un autre côté, M. Leudesdorf établit entre les aires A, B, C et P des courbes fermées (a), (b), (c) et (p) décrites par quatre points liés invariablement, a, b, c et p, la relation

$$P = Ax + By + Cz + \pi t^2,$$

x, y et z désignant les coordonnées triangulaires du point p par rapport au triangle abc, et t^2 le carré de la tangente menée du point p au cercle abc..

De ce théorème M. Kempe en déduit un autre, équivalent, dont l'énoncé, rectifié par M. Liguine, revient à celui que j'énonce au n° **15**.

Sur les mêmes sujets, il faut encore citer cet énoncé de M. Zeuthen, proposé en 1870 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques :*

Les aires engendrées par quatre segments de droites qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan satisferont toujours à une équation linéaire et homogène.

Enfin, M. Darboux, à la suite du travail de M. Liguine, expose aussi ses recherches personnelles sur ces questions : c'est par le calcul qu'il étudie le premier les relations entre les aires balayées par les vecteurs qui joignent à un point fixe les points d'un plan mobile : il trouve que ceux de ces points, auxquels correspondent des aires équivalentes, sont sur une circonférence, dont il définit géométriquement

le centre dans le cas particulier où le point fixe choisi est le centre de la rotation finie par laquelle on pourrait amener le plan mobile de sa position initiale à sa position finale.

Comme on va le voir, c'est par l'application d'une même méthode géométrique générale que j'ai été conduit à retrouver la plupart de ces résultats, qui se trouvent, par là même, exposés didactiquement, en même temps que complétés de propriétés nouvelles, et même généralisés dans la dernière partie de ce travail.

ERNEST DUPORCQ.

Fontainebleau, 19 décembre 1894.

I.

1. Définissons d'abord avec précision l'aire balayée par un vecteur qui se déplace d'une manière quelconque dans le plan, et dont la longueur même est variable.

Dans le cas où l'origine, o, du vecteur considéré, $\overline{oa}$, reste fixe dans le plan, la valeur de l'aire, que balaye ce vecteur dans un déplacement élémentaire, devra évidemment être représentée par la différentielle

$$\tfrac{1}{2}\overline{oa}^2 . d\varphi,$$

$d\varphi$ désignant l'angle élémentaire dont tourne le sens du vecteur, angle dont la valeur pourra être positive ou négative, quand on aura choisi un sens positif de rotation.

Dans le cas où le vecteur $\overline{ab}$ se déplace d'une manière quelconque dans le plan, soit o le point où la droite ab touche son enveloppe; dans un déplacement élémentaire, l'origine, o, des vecteurs $\overline{oa}$ et $\overline{ob}$ peut être considérée comme fixe : par définition, l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ dans ce déplacement élémentaire sera égale à la différence des aires balayées dans le même déplacement par les vecteurs $\overline{ob}$ et $\overline{oa}$.

La définition de cette aire élémentaire suffit à déterminer la valeur de l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ dans un déplacement fini.

Nous représenterons, désormais, cette aire par la notation

$$(\overline{ab}).$$

2. Soit o un point fixe : si un point a décrit une courbe fermée, on voit que, en grandeur et en signe, l'aire balayée par le vecteur $\overline{oa}$ est indépendante du point o : sa valeur est, par définition, celle de l'aire de la courbe fermée considérée.

3. On peut se rendre compte également que :

Si les deux extrémités, a et b, d'un vecteur $\overline{ab}$ décrivent des courbes fermées (a) et (b), l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ est, en grandeur et en signe, égale à l'excès de l'aire de la courbe (a) sur l'aire de la courbe (b).

4. Si, en particulier, la courbe (a) est l'enveloppe de la droite ab, l'aire balayée par le vecteur $\overline{ab}$ sera, d'après sa définition même (**1**), égale à l'aire de la courbe (m), lieu des extrémités des vecteurs $\overline{om}$, identiques aux vecteurs $\overline{ab}$, et issus d'un point fixe, o.

On obtient, par exemple, ainsi la propriété suivante :

Soient (p) la podaire, relative à un point o, d'une courbe fermée (a), et (q) la podaire, relative au même point, de la développée de (a) : l'aire de la courbe (p) est égale à la somme des aires des courbes (a) et (q).

5. De la définition, ou plutôt des conventions de signes qui précèdent, résulte immédiatement que, si un vecteur $\overline{ab}$, de grandeur fixe, tourne d'un angle φ autour d'un point fixe ω, pris dans le plan, on aura

$$(\overline{ab}) = \tfrac{1}{2}(\overline{\omega b}^2 - \overline{\omega a}^2)\,\varphi.$$

6. Si c représente un point invariablement lié au segment $\overline{ab}$, on voit ainsi que

$$(\overline{ab}) + (\overline{bc}) + (\overline{ca}) = 0.$$

Cette propriété, vraie pour une rotation infiniment petite, sera vraie encore, par suite, pour un déplacement quelconque du triangle *abc*, car on peut considérer ce déplacement comme résultant de la succession d'une infinité de rotations élémentaires autour de centres instantanés de rotation : nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si un polygone fermé quelconque, abc... la, de grandeur invariable, se déplace d'une manière quelconque dans le plan, la somme des aires balayées par les vecteurs $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, ..., $\overline{la}$ *est nulle.*

Plus généralement :

Un contour fermé quelconque balaye toujours une aire nulle.

6 *bis.* Les expressions des aires balayées par les trois vecteurs $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ et $\overline{cc'}$, qui tournent d'un angle φ autour d'un point fixe ω, peuvent encore s'écrire

$$(\overline{aa'}) = \overline{aa'}.\bar{\alpha}.\varphi,$$

$$(\overline{bb'}) = \overline{bb'}.\bar{\beta}.\varphi,$$

$$(\overline{cc'}) = \overline{cc'}.\bar{\gamma}.\varphi,$$

$\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ et $\bar{\gamma}$ désignant les distances respectives du centre ω aux perpendiculaires élevées aux milieux des segments considérés. Comme ces distances sont liées par une relation linéaire, indépendante du centre ω, on voit qu'il en est de même des aires en question. En considérant une suite de rotations élémentaires, on trouve donc ainsi que :

Les aires balayées par trois vecteurs qui font partie d'une même figure plane et invariable qui se meut dans son plan satisferont toujours à une équation linéaire.

II.

7. Supposons qu'un plan P se meuve sur un plan fixe Q. Soit *a* un point du plan P : nous nous proposons de chercher quels sont les

points m du plan P, tels que, dans un déplacement donné de ce plan, les vecteurs $\overline{am}$ balayent dans le plan fixe des aires équivalentes à une aire donnée.

8. Un cas particulièrement simple est celui où le déplacement considéré du plan P est une rotation autour d'un point ω : le lieu cherché est alors une circonférence de centre ω, puisque ($\mathfrak{d}$), si l'on désigne par φ l'angle dont tourne le plan P,

$$(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}(\overline{\omega m}^2 - \overline{\omega a}^2)\varphi.$$

Cela posé, supposons que le plan P tourne successivement des angles φ_1, φ_2, ... autour des centres respectifs ω_1, ω_2, ... pris dans ce plan P : l'aire balayée par le vecteur $\overline{am}$ dans le déplacement total du plan P aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}(\overline{\omega_1 m}^2 . \varphi_1 + \overline{\omega_2 m}^2 . \varphi_2 + \ldots) - \tfrac{1}{2}(\overline{\omega_1 a}^2 . \varphi_1 + \overline{\omega_2 a}^2 . \varphi_2 + \ldots)$$

ou, si l'on désigne par γ_ω le centre de gravité du système des points ω_1, ω_2, ... du plan P, considérés comme de masses proportionnelles aux angles φ_1, φ_2, ..., et par φ l'angle total de rotation du plan P,

$$(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}(\overline{\gamma_\omega m}^2 - \overline{\gamma_\omega a}^2)\varphi.$$

9. Or, un déplacement quelconque du plan P peut généralement être considéré comme formé par la succession d'une infinité de rotations élémentaires : le point γ_ω devient alors le centre de gravité de l'arc de courbe (ω) formé dans le plan P par les centres instantanés de rotation, à la condition d'attribuer à un arc quelconque de cette courbe une masse proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan P.

10. On peut obtenir le mouvement du plan P en faisant rouler sans glissement l'arc (ω) sur l'arc de même longueur (ω'), formé par les centres instantanés dans le plan fixe Q ; soient r et r' les rayons de

courbure respectifs de ces deux courbes aux deux points correspondants ω et ω' : il est bien facile de voir que la densité à attribuer à l'arc (ω) autour du point ω devra être proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, à la condition de considérer les rayons r et r' comme de même signe lorsque les cercles osculateurs correspondants deviennent tangents extérieurement, et comme de signes différents dans le cas contraire; on pourra, évidemment, avoir à considérer ainsi des arcs de masse négative : d'une manière générale, la densité en un point, proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$, devra changer de signe quand la rotation du plan P changera de sens.

11. S'il arrive, par exemple, que l'angle total de rotation du plan P soit nul, la masse totale de l'arc (ω) le sera également, et le point γ_ω sera rejeté à l'infini, dans la direction de la droite qui joint le centre de gravité des éléments de masses positives à celui des éléments de masses négatives.

12. Notre raisonnement suppose que le plan P ne subit pas, pendant son déplacement, de translation finie.

Supposons donc que le plan P, après avoir subi un déplacement A, constitué par une suite de rotations, subisse une translation. Soit φ l'angle total de rotation du plan P, et soit γ_ω le point de ce plan tel que l'aire balayée, pendant le déplacement A, par un vecteur quelconque, $\overline{\gamma_\omega m}$, issu de ce point, ait pour valeur

$$\frac{1}{2}\overline{\gamma_\omega m}^2 . \varphi.$$

Soient m_1 et m_2 les positions occupées par le point m au début et à la fin de la translation : désignons par $\bar{l}$ la longueur $\overline{m_1 m_2}$; et par α l'angle, positif ou négatif, que fait avec la direction $m_1 m_2$ le vecteur $\overline{\gamma_\omega m}$, pendant la translation : l'aire $(\overline{\gamma_\omega m})$ correspondant à la translation aura évidemment pour valeur

$$\bar{l} . \overline{\gamma_\omega m} \sin \alpha.$$

L'aire totale balayée par $\overline{\gamma_\omega m}$ sera donc

$$\tfrac{1}{2}\overline{\gamma_\omega m}^2 . \varphi + \overline{l} . \overline{\gamma_\omega m} \sin\alpha.$$

En égalant cette expression à une constante, on trouve pour le lieu du point m une circonférence : son centre, O, est tel que le vecteur $\overline{\gamma_\omega O}$ ait pour longueur

$$\frac{\overline{l}}{\varphi},$$

et, quand ce vecteur occupe sa position finale, la direction $m_1 m_2$ fait avec lui un angle droit positif.

L'aire totale balayée par le vecteur $\overline{om}$ aura pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\overline{om}^2 . \varphi.$$

13. Les résultats précédents nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Quand un plan P *se déplace d'une manière quelconque sur un plan fixe, il existe toujours dans ce plan* P *un point o, tel que tout vecteur du plan* P *balaye une aire équivalente à celle qu'il balayerait si le plan* P *tournait autour du point o d'un angle égal à son angle total de rotation pendant le déplacement considéré.*

Ce point o est généralement le centre de gravité γ_ω *de l'arc* (ω) *formé dans le plan* P *par les centres instantanés de rotation* ω, *en supposant la masse d'un élément quelconque de cette courbe proportionnelle à l'angle de la rotation correspondante du plan* P.

14. Comme application immédiate de ce théorème, nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante :

Une courbe fermée admettant un centre o roule sans glisser sur une droite, jusqu'à ce qu'elle ait accompli une révolution : l'aire balayée par un vecteur $\overline{om}$ *entraîné dans le mouvement est égale à l'aire du cercle de rayon* $\overline{om}$.

En particulier :

L'aire balayée par un rayon d'un cercle qui accomplit une révolution en roulant sur une droite est égale à l'aire de ce cercle.

15. Un cas particulièrement intéressant est celui où le plan P revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale, de sorte que tous ses points décrivent dans le plan Q des courbes fermées : car, alors (**3**), l'aire balayée par un vecteur $\overline{om}$ a pour valeur la différence des aires des courbes fermées (m) et (o) décrites par ses extrémités. Nous obtenons donc le théorème suivant :

Si un plan P *se déplace sur un plan* Q, *de sorte que tous ses points décrivent des courbes fermées, tous les points de ce plan qui décrivent des courbes d'aires équivalentes sont les points d'une circonférence de centre o : si le plan* P *a accompli n révolutions, dans le sens positif, l'aire de la courbe décrite par un de ses points, m, est équivalente à l'aire de la courbe décrite par le centre o, augmentée de la somme des aires de n cercles de rayon* $\overline{om}$.

Le centre o sera généralement le centre de gravité γ_ω *de la courbe* (ω) *formée dans le plan* P *par les centres instantanés, pourvu que la masse d'un arc quelconque de cette courbe soit proportionnelle à l'angle correspondant de rotation du plan* P.

16. Considérons le cas particulier d'une courbe fermée C′, qui roule sans glisser sur une courbe identique, C, de sorte que ces deux courbes soient constamment symétriques par rapport à leur tangente commune au point de contact : le point o sera dans ce cas le centre de gravité de la courbe C′ si l'on suppose en chacun de ses points la densité proportionnelle à la courbure, ou inversement proportionnelle à la longueur du rayon de courbure ; le point o est appelé le *centre de gravité des courbures* de la courbe C.

D'ailleurs, m' étant un point lié invariablement à la courbe C′, soit m le point correspondant lié à la courbe C, avec lequel m' coïncide lorsque C′ coïncide avec C : ces points m et m' restent constamment symétriques par rapport à la tangente au point de contact, de sorte

que la trajectoire (m') a une aire égale au quadruple de l'aire de la podaire du point m relativement à la courbe C. Il résulte de là que :

Le lieu des points m dont les podaires, relatives à une même courbe fermée C, *ont des aires équivalentes, est une circonférence, dont le centre est le centre de gravité des courbures de la courbe* C.

Remarque. — De cette propriété combinée au théorème obtenu au n° 4 résulte immédiatement la propriété suivante :

Une courbe fermée a le même centre de gravité des courbures que sa développée.

On voit donc que :

Des courbes fermées parallèles entre elles ont le même centre de gravité des courbures.

17. Nous signalerons encore le cas particulier suivant :

Si le plan P *est entraîné par le mouvement d'une courbe à centre, qui roule sans glisser sur une courbe à centre de même longueur, le point o sera le centre de la courbe mobile.*

On voit, par exemple, ainsi que :

L'aire de l'épicycloïde à n rebroussements, décrit par un point d'un cercle de rayon r, qui roule sur un cercle de rayon nr, a pour valeur

$$(n+1)(n+2)\pi r^2.$$

L'aire de l'hypocycloïde analogue sera de même

$$(n-1)(n-2)\pi r^2.$$

18. Considérons, en particulier, dans le plan P, une droite Δ : si l'on connaît les aires A et B des courbes fermées (a) et (b) décrites

par deux de ses points, a et b, il sera facile d'en déduire l'aire C de la courbe (c) décrite par l'un quelconque de ses points c.

Supposons, en effet, que la droite Δ ait accompli n révolutions dans le sens positif, et désignons par O l'aire de la courbe fermée décrite par le point o (**15**). On a

$$A = O + n\pi.\overline{oa}^2,$$

$$B = O + n\pi.\overline{ob}^2,$$

$$C = O + n\pi.\overline{oc}^2.$$

Grâce à la relation de Stewart, on déduit de ces égalités que :

Les aires A, B *et* C *des courbes fermées décrites par trois points* a, b *et* c *d'une droite qui se déplace dans le plan, et revient à sa position initiale après avoir accompli* n *révolutions, sont liées par la relation*

$$A.\overline{bc} + B.\overline{ca} + C.\overline{ab} + n\pi.\overline{bc}.\overline{ca}.\overline{ab} = 0.$$

19. En particulier :

Si les extrémités a *et* b *d'un segment de grandeur fixe décrivent des courbes fermées d'aires équivalentes (par exemple, la même courbe) l'aire de la courbe décrite par un point* c *de* ab *sera égale à la valeur commune de ces aires équivalentes, augmentée de l'aire*

$$n\pi.\overline{ca}.\overline{cb}.$$

Si les points a et b décrivent des courbes d'aire nulle, l'aire de la trajectoire du point c aura pour valeur : $n\pi.\overline{ca}.\overline{cb}$. On en déduit la propriété suivante :

On suppose que les deux extrémités a *et* b *d'un segment* $\overline{ab}$, *au lieu de se déplacer sur deux droites, de sorte qu'un point quelconque du segment décrive une ellipse, se déplacent, dans des conditions analogues, sur deux courbes quelconques : l'aire de la*

courbe fermée, décrite par un point quelconque du segment $\overline{ab}$, *sera égale à l'aire de l'ellipse correspondante.*

III.

20. Soit a un point d'un plan Q, sur lequel se meut un plan P. Proposons-nous de chercher quels sont les points m du plan P tels que, dans un déplacement donné de ce plan, les aires balayées par les vecteurs $\overline{am}$ soient équivalentes à une aire donnée.

21. Considérons d'abord le cas d'une rotation élémentaire : soit ω le centre de rotation du plan P, et $d\varphi$ l'angle élémentaire dont il tourne. Désignons par p la projection du point a sur la perpendiculaire mp à ωm, et par h le point du plan P qui coïncide avec le milieu du segment $\overline{a\omega}$: l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ a évidemment pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\overline{\omega m}\,.\,\overline{ap}\,.\,d\varphi,$$

les vecteurs $\overline{\omega m}$ et $\overline{ap}$ étant pris de même signe, s'ils sont de même sens. Or, on a alors, en grandeur et en signe, l'égalité

$$\overline{\omega m}\,.\,\overline{ap} = \overline{hm}^2 - \overline{ha}^2 = \overline{hm}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{a\omega}^2.$$

La valeur de l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ peut donc s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\overline{hm}^2\,.\,d\varphi - \tfrac{1}{8}\overline{a\omega}^2\,.\,d\varphi.$$

22. Dans le cas d'un déplacement quelconque, soit ω le point du plan P qui devient son centre instantané de rotation à un instant donné, soit ω' le point du plan Q, avec lequel ω coïncide à cet instant; enfin, soit h le point du plan P qui coïncide alors avec le milieu du segment $\overline{a\omega'}$. De la même manière que plus haut (**9**), on déduit du résultat précédent que le lieu cherché (**20**) pour le point m est une circonférence : son centre, A, est le centre de gravité de l'arc de

courbe (h), formé dans le plan P par les points h, pourvu qu'on attribue aux différents arcs de cette courbe une masse proportionnelle à l'angle de la rotation correspondante du plan P.

Désignons, comme précédemment (**10**), par r et r' les rayons de courbure des arcs (ω) et (ω') aux points correspondants ω et ω'. Soit γ_ω le centre de gravité de l'arc (ω), dont on suppose la densité, au point ω, proportionnelle à la somme $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}$. Considérons la courbe (α) du plan P, dont les points α viennent successivement coïncider avec a, et attribuons à chaque arc de cette courbe une masse égale à celle de l'arc correspondant de la courbe (ω); soit γ_α le centre de gravité de la courbe hétérogène ainsi déterminée : le point A est évidemment le milieu du segment $\overline{\gamma_\omega \gamma_\alpha}$.

La courbe (α) n'est d'ailleurs autre que la trajectoire du point a dans le plan P, supposé fixe, lorsque, dans un mouvement inverse de celui que nous considérons, le plan Q est entraîné par le roulement sans glissement de l'arc (ω') sur l'arc (ω).

23. En désignant par φ l'angle total de rotation du plan P, on voit, en intégrant l'expression de l'aire élémentaire balayée par $\overline{am}$ (**21**), que, pour un déplacement fini du plan P,

$$(\overline{am}) - \tfrac{1}{2} \mathrm{A}\overline{m}^2 . \varphi = \text{const.},$$

la constante ne dépendant que de la position du point a dans le plan Q.

24. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Un plan P *se déplace sur un plan* Q : *a désignant un point fixe du plan* Q, *le lieu des points* m, *du plan* P, *tels que les vecteurs* $\overline{am}$ *balayent des aires équivalentes à une aire donnée, est une circonférence de centre* A.

Si φ *désigne l'angle total de rotation du plan* P, *l'aire* $(\overline{am})$ *équivaut à l'aire* $(\overline{a\mathrm{A}})$, *augmentée de l'aire*

$$\tfrac{1}{2} \mathrm{A}\overline{m}^2 . \varphi.$$

Le point A *est généralement le milieu du segment* $\overline{\gamma_\omega \gamma_\alpha}$, *déterminé comme il suit : on considère, dans le plan* P, *la courbe* (ω) *formée par les centres instantanés de rotation, et la courbe* (α) *formée par les points* α *qui viennent coïncider successivement avec le point* a : *les points* γ_ω *et* γ_α *sont les centres de gravité de ces courbes, pourvu qu'on suppose que la masse d'un arc quelconque soit proportionnelle à l'angle dont tourne le plan* P *dans le déplacement correspondant.*

25. Dans le cas où l'angle φ sera nul, le point A sera rejeté à l'infini, et les circonférences concentriques, obtenues dans le cas général, se réduiront à des droites parallèles.

26. Parmi les cas particuliers, le plus simple est celui où le plan P est entraîné par le mouvement d'une circonférence qui roule sans glisser à l'intérieur d'une circonférence de rayon double, le point a étant au centre de cette circonférence fixe : car le point h (**21**) reste fixe dans le plan P, et coïncide constamment avec le centre de la circonférence mobile. On déduit de là que, m étant un point quelconque du plan P, le secteur d'ellipse balayé par le vecteur $\overline{am}$ est proportionnel à l'angle de rotation du plan P.

27. Un autre cas simple est celui où le plan P tourne d'un angle φ autour d'un point fixe, ω : le point A est alors le centre de gravité de l'arc de cercle homogène du plan P dont les points viennent successivement coïncider avec le milieu du segment $\overline{\omega a}$.

28. On obtiendra d'ailleurs le point A en prenant le centre de gravité d'un arc homogène, toutes les fois que le plan P sera entraîné par le mouvement épicycloïdal d'un cercle roulant sans glisser sur un cercle fixe du plan Q admettant le point a pour centre.

29. Des résultats généraux obtenus, on déduit, comme nous avons fait déjà dans un cas analogue (**18**) que :

Les aires $(\overline{ap})$, $(\overline{aq})$ *et* $(\overline{ar})$ *balayées par les vecteurs* $\overline{ap}$, $\overline{aq}$ *et*

$\overline{ar}$, qui joignent un point fixe, a, à trois points, p, q et r, d'une droite mobile dans le plan, sont liées par la relation

$$(\overline{ap}).\overline{qr}+(\overline{aq})\overline{rp}+(\overline{ar})\overline{pq}+\tfrac{1}{2}\varphi.\overline{qr}.\overline{rp}.\overline{pq}=0,$$

φ représentant l'angle dont tourne la droite pqr dans son déplacement.

30. En particulier, si r est le milieu du segment $\overline{pq}$, on a

$$(\overline{ar})=\tfrac{1}{2}[(\overline{ap})+(\overline{aq})]+\tfrac{1}{2}\varphi.\overline{rp}.\overline{rq}.$$

On déduit de là, par exemple, la propriété suivante :

Soient C *et* C′ *deux branches de courbe indéfinies, limitées à leur point commun, a, et telles que* C *coïncide avec* C′ *après avoir tourné de l'angle φ autour du point a. Un vecteur $\overline{pq}$, de grandeur fixe, se déplace de sorte que ses extrémités p et q restent respectivement sur les courbes* C *et* C′ : *le point a est à la fois la position initiale du point q sur* C′ *et la position finale du point p sur* C. *Soit r le milieu de $\overline{pq}$: l'aire balayée par le vecteur $\overline{ar}$ est indépendante de la courbe* C, *et a la même valeur absolue que l'expression*

$$\tfrac{1}{8}(\pi-\varphi)\overline{pq}^2.$$

31. Considérons spécialement le cas où le déplacement du plan P sur le plan Q est tel que tous ses points m décrivent des courbes fermées : dans ce cas, l'aire balayée par le vecteur $\overline{am}$, égale à l'aire de la courbe fermée décrite par le point m, est indépendante du point a. La position du point A ne dépendra donc pas du point a, et ce point coïncidera toujours, d'après ce que nous avons vu précédemment (**13**) avec le point γ_ω.

On déduit de là le théorème suivant :

Un plan Q *se déplace sur un plan* P, *de sorte que tous ses points décrivent des courbes fermées. Si l'on suppose que la masse d'un*

arc quelconque de ces courbes soit proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan Q, *toutes ces trajectoires hétérogènes ont le même centre de gravité.*

Ce point coïncide, en général, avec le centre de gravité de la courbe formée dans le plan P *par les centres instantanés de rotation, pourvu qu'on suppose encore la masse de tout arc de cette courbe proportionnelle à l'angle correspondant de rotation du plan* Q.

IV.

32. Quand l'angle φ, dont tourne le plan P dans son déplacement, n'est pas multiple de 2π, il existe toujours dans le plan P un point s, qui revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale. Ce point, décrivant une courbe fermée, l'aire balayée par le vecteur $\overline{as}$, issu d'un point quelconque, a, du plan Q, est indépendante du choix de ce point a. Soit, dans le plan P, A le centre correspondant au point a (**24**); on a

$$(\overline{as}) = (\overline{aA}) + \tfrac{1}{2}A\overline{s}^2.\varphi$$

et

$$(\overline{am}) = (\overline{aA}) + \tfrac{1}{2}A\overline{m}^2.\varphi.$$

En posant

$$(\overline{as}) - (\overline{am}) = \tfrac{1}{2}K^2\varphi,$$

on a donc

$$A\overline{s}^2 - A\overline{m}^2 = K^2.$$

On voit, par suite, que :

Toutes les circonférences (m) *du plan* P *qui correspondent* (**24**) *aux différents points* a *du plan* Q *et à une aire donnée coupent orthogonalement le cercle de centre* s, *dont le rayon* K, *réel ou imaginaire, est tel que* $\frac{1}{2}K^2\varphi$ *représente l'excès sur l'aire donnée de l'aire de la courbe fermée décrite par le point* s.

33. Pour obtenir le cercle correspondant au point a et à une aire

donnée, il suffira donc de connaître son centre A. Nous allons étudier comment les points A du plan P correspondent aux points a du plan Q.

34. Nous ferons d'abord la remarque suivante.

Le plan P subissant un déplacement donné, soient, dans le plan Q, m_1 et m_2 les positions initiale et finale d'un point m du plan P. Le lieu des points a du plan Q, tels que les aires $(\overline{am})$ soient équivalentes, est visiblement une parallèle à la droite $m_1 m_2$.

35. Soit a un point quelconque de cette parallèle (a), et soit A le point correspondant du plan P. La différence

$$(\overline{as}) - (\overline{am})$$

étant constante, il en est de même (**24**) de la différence

$$\overline{\mathrm{A}s}^2 - \overline{\mathrm{A}m}^2,$$

ce qui prouve que les points A ont la même projection sur la droite sm.

Ainsi, quand le point a se déplace, dans le plan Q, sur une parallèle (a) à $m_1 m_2$, le point A se déplace, dans le plan P, sur une perpendiculaire (A) à sm.

36. Soit, dans le plan Q, s_1 la position initiale et finale du point s ; comme l'angle $m_1 s_1 m_2$ est précisément égal à l'angle φ, on voit que, si l'on fait tourner le plan P de l'angle $\frac{\varphi}{2}$ à partir de sa position initiale, la droite (A) deviendra parallèle à sa correspondante (a). Par suite :

La correspondance des points a et A *donne lieu, dans les plans* Q *et* P, *à des figures semblables.*

37. Soient (a) et (b) deux droites du plan Q parallèles à $m_1 m_2$, (A) et (B) leurs correspondantes dans le plan P, α et β les points où

ces dernières coupent sm. Soit $\overline{q}$ la distance des parallèles (a) et (b), soit $\overline{p}$ celle des parallèles (A) et (B). On a évidemment

$$(\overline{am}) - (\overline{bm}) = \tfrac{1}{2}\,\overline{q}\,.\,\overline{m_1 m_2} = \overline{q}\,.\,\overline{m_1 s_1}\,.\sin\tfrac{\varphi}{2}.$$

D'ailleurs

$$(\overline{am}) - (\overline{as}) = \tfrac{1}{2}\,.\,\varphi\left(\overline{\mathrm{A}m}^2 - \overline{\mathrm{A}s}^2\right) = \tfrac{1}{2}\,.\,\varphi\,.\,\overline{ms}(\overline{m\alpha} - \overline{\alpha s}),$$

$$(\overline{bm}) - (\overline{bs}) = \tfrac{1}{2}\,.\,\varphi\left(\overline{\mathrm{B}m}^2 - \overline{\mathrm{B}s}^2\right) = \tfrac{1}{2}\,.\,\varphi\,.\,\overline{ms}(\overline{m\beta} - \overline{\beta s}).$$

On a donc encore

$$(am) - (bm) = \varphi\,.\,ms\,.\,\overline{\alpha\beta} = \varphi\,.\,\overline{ms}\,.\,\overline{p}.$$

On voit donc que

$$\overline{q}\,.\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \overline{p}\,.\,\varphi.$$

Par suite :

Le rapport de similitude de deux figures correspondantes (A) *et* (a) *a pour valeur*

$$\frac{1}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

58. Ces résultats, bien évidents quand le déplacement du plan P est une rotation, peuvent d'ailleurs être déduits de ce cas particulier.

Soit, en effet, D un déplacement quelconque du plan P, dans lequel il tourne de l'angle φ; soit s le point de ce plan qui revient, à la fin du déplacement, à sa position initiale, s_1; désignons par P_1 et P_2 les positions initiale et finale du plan P sur le plan Q. Considérons les rotations R_1 et R_2 du plan P autour du point s_1, qui amèneraient ce plan, la première, de la position P_1 à la position P_2 en le faisant tourner de l'angle φ; la seconde, de la position P_2 à la position P_1, en le faisant tourner de l'angle $(2\pi - \varphi)$. Soit, enfin, pour le déplacement D, γ_ω le centre de gravité de l'arc hétérogène (ω) (**24**).

Désignons par A, A_1 et A_2 les centres qui, dans le plan P, correspondent (**24**) au point a du plan Q pour les déplacements D, R_1

et R_2. Supposons les masses des deux premiers proportionnelles à l'angle φ, la masse du troisième, proportionnelle à l'angle $(2\pi - \varphi)$.

Si le plan P subit successivement les rotations R_1 et R_2, le point o (**15**) correspondant à son déplacement total coïncide avec s; s'il subit successivement le déplacement D et la rotation R_2, le point o correspondant de même au nouveau déplacement total devient le centre de gravité γ des points γ_ω et s, supposés de masses proportionnelles aux angles φ et $(2\pi - \varphi)$. Par suite (**31**) le point s est le centre de gravité des masses A_1 et A_2; le point γ, celui des masses A et A_2.

On déduit de là que le vecteur $\overline{A_1 A}$ est identique au vecteur $\overline{s\gamma_\omega}$, ce qui redonne les résultats précédents. On voit, de plus, que le point γ_ω est le point du plan P qui correspond au point s_1 du plan Q.

39. Comme le point A est (**24**) le milieu du segment $\overline{\gamma_\omega\gamma_\alpha}$, on obtient donc le théorème suivant :

Un plan Q *se mouvant sur un plan* P, *soit* (α) *la trajectoire décrite par l'un quelconque*, a, *de ses points. En supposant la masse de tout arc de cette courbe proportionnelle à l'angle correspondant dont tourne le plan* Q, *on fait, dans le plan* P, *correspondre au point* a, *le centre de gravité*, γ_α, *de cette trajectoire hétérogène.*

Deux figures correspondantes, (a) *et* (γ_α), *sont semblables; de plus, la figure* (γ_α) *devient homothétique de la figure* (a), *le rapport d'homothétie étant*

$$\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}},$$

si le plan Q *tourne, à partir de sa position initiale, de l'angle* $\frac{\varphi}{2}$, φ *désignant son angle total de rotation pendant le déplacement considéré.*

De plus, au point du plan Q, *qui décrit une trajectoire fermée, correspond le centre de gravité de la courbe formée dans le plan* P *par les centres instantanés de rotation, supposés de masses proportionnelles aux rotations élémentaires correspondantes.*

V.

40. Pour compléter cette étude, nous indiquerons rapidement une généralisation des résultats précédents : nous ne développerons pas les démonstrations, à cause de leur analogie avec celles que nous avons données jusqu'ici.

41. *Soient* P *et* Q *deux plans mobiles qui éprouvent sur un plan fixe des déplacements simultanés. Soit a un point quelconque du plan* Q : *le lieu des points m du plan* P, *tels que les vecteurs* $\overline{am}$ *balayent sur le plan fixe des aires équivalentes à une aire donnée, est généralement une circonférence, de centre* A.

Soit φ *l'angle total de rotation du plan* P : *l'aire balayée par le vecteur* $\overline{am}$ *équivaut à l'aire balayée par le vecteur* $\overline{aA}$, *augmentée de l'aire*

$$\tfrac{1}{2}\overline{Am}^2.\varphi.$$

A un instant quelconque du déplacement, on considère, dans le plan P, *son centre instantané de rotation,* ω, *le point* ε, *qui coïncide avec le centre instantané de rotation,* γ_1, *du plan* Q, *enfin, le point* α, *qui coïncide avec le point a. Si l'on attribue à tout arc de la courbe* (ω) *une masse proportionnelle à l'angle correspondant* $\Delta\varphi$ *dont tourne le plan* P, *à tout arc de la courbe* (ε), *une masse proportionnelle à l'angle correspondant,* $\Delta\psi$, *dont tourne le plan* Q, *enfin, à tout arc de la courbe* (α), *une masse proportionnelle à la différence correspondante* $(\Delta\varphi - \Delta\psi)$, *le centre* A *sera le centre de gravité de l'ensemble des arcs hétérogènes* (ω), (ε) *et* (α).

42. On retrouve, comme cas particuliers, les résultats obtenus précédemment, d'abord, en faisant coïncider constamment les plans P et Q, puis en supposant le plan Q fixe.

43. A un point, a, du plan Q, correspond, dans le plan P, le centre de gravité γ_α de l'arc hétérogène (α) : le théorème du n° **39**

montre que, à une figure, (a), du plan Q, correspond ainsi dans le plan P une figure semblable (γ_2) : ces deux figures deviennent homothétiques, si les plans P et Q tournent seulement, à partir de leurs positions initiales, des angles $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{\psi}{2}$, le rapport d'homothétie étant

$$\frac{2}{\varphi - \psi} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

On déduit de là que :

La correspondance des points a et A *donne lieu, dans les plans* Q *et* P, *à des figures semblables. Si* φ *et* ψ *désignent les angles dont tournent respectivement les plans* P *et* Q *dans leurs déplacements simultanés, ces figures deviennent homothétiques, quand on fait tourner les plans* P *et* Q *des angles* $\frac{\varphi}{2}$ *et* $\frac{\psi}{2}$ *à partir de leurs positions initiales; enfin, le rapport d'homothétie des figures* (A) *et* (a) *a pour valeur*

$$\frac{1}{\varphi} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

VI.

44. Dans la dernière Partie de ce Mémoire je vais exposer une généralisation fort intéressante des propriétés que j'ai obtenues dans la deuxième Partie : je vais supposer maintenant que la figure mobile P n'est plus assujettie à garder une grandeur invariable, mais qu'elle est astreinte seulement à rester semblable à une figure donnée, H.

45. A un tel déplacement correspond une notion analogue à celle du centre instantané de rotation : le point o qui permet d'amener par une rotation une figure P, de grandeur invariable, d'une position P_1 à une position P_2 est tel que, si a_1 et b_1 désignent les positions initiales, a_2 et b_2 les positions finales de deux points quelconques a et b de la figure P, les triangles oa_1b_1 et oa_2b_2 sont égaux ; on peut remarquer en outre que, si p désigne le point de rencontre des droites a_1b_1 et a_2b_2, les quadrilatères pa_1a_2o et pb_1b_2o sont tous deux inscripti-

bles à des circonférences. Supposons maintenant que les figures P_1 et P_2 sont simplement semblables entre elles; soient a_1 et a_2, b_1 et b_2 deux couples de points homologues : le second point d'intersection, o, des circonférences circonscrites aux triangles pa_1a_2 et pb_1b_2 est visiblement tel que les triangles oa_1b_1 et oa_2b_2 sont semblables. On peut donc, par une rotation autour de o, amener P_1 à être homothétique à P_2 par rapport à o.

Si P_1 et P_2 sont deux positions infiniment voisines de la figure II, dans le déplacement que nous avons envisagé, p devient le point où ab touche son enveloppe, et le point o est le second point d'intersection des circonférences qui passent par p et qui touchent respectivement en a et b les trajectoires (a) et (b).

La considération de ce point, qu'on peut appeler le *centre instantané d'homothétie rotatoire*, va nous permettre d'appliquer au cas d'une figure de forme invariable les méthodes employées dans ce qui précède.

46. Il est bien évident, en effet, que l'aire décrite par un vecteur $\overline{am}$ pendant un déplacement élémentaire de la figure P, diffère d'infiniment petits d'ordre supérieur de l'aire que décrirait le même secteur, si, sans varier de grandeur, il ne faisait que tourner du même angle autour du point o. Soit $d\varphi$ cet angle de rotation élémentaire; on aura (5)

$$d(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{om}^2 - \overline{oa}^2\right) d\varphi.$$

Soit, dans la figure II, ω l'homologue du point de P qui coïncide avec o; soient α et μ les homologues de a et m; enfin soit K le rapport de similitude des figures P et II. On aura

$$d(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\omega\mu}^2 - \overline{\omega\alpha}^2\right) K^2\, d\varphi.$$

47. Soit γ le centre de gravité de l'arc (ω) de la figure II, correspondant à un déplacement fini de la figure P, chaque élément de l'arc (ω) ayant une masse proportionnelle à la différentielle corres-

pondante $K^2 d\varphi$. On aura

$$(\overline{am}) = \tfrac{1}{2}\left(\overline{\gamma\mu}^2 - \overline{\gamma\alpha}^2\right)\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} K^2\, d\varphi.$$

48. Nous ne considérerons que le cas particulier où toutes les trajectoires (m) sont des courbes fermées. On obtient alors le théorème suivant :

Si une figure P *se déplace dans le plan en restant semblable à une figure donnée* II, *le lieu des points* μ *de la figure* II, *dont les homologues* m *décrivent des trajectoires d'aires équivalentes, est une circonférence, de centre* γ.

La différence des aires (a) *et* (b), *correspondant à deux points* α *et* β, *est proportionnelle à la différence des carrés des longueurs* $\gamma\alpha$ *et* $\gamma\beta$.

49. On peut obtenir ainsi un grand nombre de théorèmes. Par exemple :

Par chaque point a *d'une courbe fermée* (a) *on mène deux droites,* ab *et* am, *faisant avec* (a) *des angles donnés; on suppose que l'extrémité* b *du vecteur* $\overline{ab}$ *décrit une courbe fermée* (b) *de même aire que* a. *Soit* m *le point où* $\overline{am}$ *coupe la circonférence qui touche* (a) *en* a *et qui passe par* b : *la courbe* (m) *a la même aire que les courbes* (a) *et* (b).

On peut pour (b) choisir la courbe (a) elle-même. Quand l'angle de ab avec (a) tend vers zéro, le cercle considéré tend vers le cercle osculateur en a. On obtient alors, à la limite, le théorème suivant :

Par chaque point a *d'une courbe* (a) *on mène une droite* am, *faisant avec elle un angle donné, qui coupe au point* m *le cercle osculateur en* a : *les courbes* (a) *et* (m) *ont des aires équivalentes.*

TABLE DES MATIÈRES.

CINQUIÈME SÉRIE. — TOME I.

Les indications qui précèdent le titre de chaque Mémoire de cette Table sont celles adoptées par le Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques en 1889.

(*Note de la Rédaction.*)

Pages.

[J4a] Sur les isomorphes holoédriques et transitifs des groupes symétriques ou alternés; par M. *Ed. Maillet* 5

[J4a] Nouvelles recherches sur la limite de transitivité des groupes qui ne contiennent pas le groupe alterné; par M. *Camille Jordan* 35

[B4] Sur la division algébrique appliquée aux polynomes homogènes; par M. *Andoyer* 61

[S2cα] Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants; par M. *P. Duhem* 91

[M3a] Quelques propriétés des arcs des courbes algébriques, planes ou gauches; par M. *Georges Humbert* 181

[G3d] Remarques diverses sur les fonctions abéliennes; par M. *H. Poincaré* 219

[J1aβ] Mémoire sur les permutations quasi-alternées; par M. *Désiré André* 315

[I19c] Solution de l'équation $X^3 + 35Y^3 = Z^2$; par le *P. Pepin S. J.* ... 351

Pages.

[U4] Sur les expressions approchées des termes d'ordre élevé dans le développement de la fonction perturbatrice; par M. *N. Coculesco* 359

[Osa] De l'aire plane balayée par un vecteur variable; par M. *Ernest Duporcq* 443

FIN DU TOME I DE LA CINQUIÈME SÉRIE.

21475 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.5
t.1
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY